Dans ce chapitre, nous allons passer en revue les propriétés des ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ avec lesquels on travaille en Analyse. Ces propriétés sont en majorité déjà familières au lecteur et relèvent partiellement du cours d'Algèbre. Des notions et résultats de nature algébrique seront rappelés sans preuves; le lecteur trouvera, dans les sujets d'étude proposés à la fin de cet ouvrage, les indications nécessaires pour reconstituer lui-même les démonstrations omises.

1.1. ENTIERS NATURELS

On démontre en théorie des ensembles qu'il *existe* un triplet $(\mathbb{N}, 0, s)$ formé d'un ensemble $\mathbb{N}$, d'un élément 0 de cet ensemble et d'une application $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ vérifiant la condition suivante :

(N) *Pour chaque ensemble X, chaque élément x de X et chaque application $f : X \longrightarrow X$, il existe une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow X$ et une seule, telle que* $u(0) = x$ et $u \circ s = f \circ u$.

Si $(\mathbb{N}', 0', s')$ est un autre triplet vérifiant la condition (N) (dans laquelle on a évidemment remplacé $\mathbb{N}$ par $\mathbb{N}'$, 0 par $0'$ et s par s'), alors il existe une seule application $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}'$ telle que $u(0) = 0'$ et $u \circ s = s' \circ u$. De même, il existe une seule application $v : \mathbb{N}' \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $v(0') = 0$ et $v \circ s' = s \circ v$. Alors on a $v \circ u(0) = 0$ et $(v \circ u) \circ s = s \circ (v \circ u)$, or $(\mathrm{Id}\mathbb{N})(0) = 0$ et $s \circ \mathrm{Id}\mathbb{N} = \mathrm{Id}\mathbb{N} \circ s$, donc il résulte de l'unicité énoncée dans la condition (N) que $v \circ u = \mathrm{Id}\mathbb{N}$. De même, on a $u \circ v(0') = 0'$ et $(u \circ v) \circ s' = s' \circ (u \circ v)$, donc $u \circ v = \mathrm{Id}\mathbb{N}'$. Il en résulte que u et v sont des bijections réciproques l'une de l'autre.