1. PROPRIÉTÉS DE $\mathbb{N}$

Soit $(\mathbb{N}, 0, s)$ un triplet formé d'un ensemble $\mathbb{N}$, d'un élément 0 de $\mathbb{N}$ et d'une application $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. On suppose que ce triplet vérifie la condition (N) formulée dans le paragraphe 1.1. On se propose de démontrer les diverses propriétés de $\mathbb{N}$ énoncées dans le paragraphe 1.1.

1° Soit $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{ * \}$ l'ensemble obtenu en adjoignant à $\mathbb{N}$ un élément $*$ qui ne lui appartient pas. On définit deux applications $v : \overline{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $\bar{s} : \overline{\mathbb{N}} \longrightarrow \overline{\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} v(*) = 0 & \\ v(n) = s(n) & \text{si} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{s}(*) = 0 & \\ \bar{s}(n) = s(n) & \text{si} \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Montrer qu'il existe une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow \overline{\mathbb{N}}$, et une seule, telle que $u(0) = *$ et $u \circ s = \bar{s} \circ u$. En déduire que $v \circ u = \operatorname{Id} \mathbb{N}$ et $u \circ v = \operatorname{Id} \overline{\mathbb{N}}$. Démontrer que v est bijective, que $u \circ s$ est injective et en déduire que s est injective.

2° Soit X une partie de $\mathbb{N}$ telle que $0 \in X$ et $s(X) \subset X$. Soient $i : X \longrightarrow \mathbb{N}$ l'injection canonique et $\tilde{s} : X \longrightarrow X$ l'application induite par s. Montrer qu'il existe une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow X$, et une seule, telle que $u(0) = 0$ et $u \circ s = \tilde{s} \circ u$. Montrer que $i \circ u = \operatorname{Id} \mathbb{N}$; en déduire que $X = \mathbb{N}$.

3° Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et soit $\hat{s} : E \longrightarrow E$ l'application définie par $\hat{s}(f) = s \circ f$.