**Equations du second degré dans R**

E est l'équation $x^2 - s x + p = 0$ où s et p sont des réels donnés et x l'inconnue réelle .
On sait résoudre de manière algébrique l'équation E .
On se propose de résoudre de manière géométrique l'équation E .

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct ( O , I , J ) .
J ( 0 , 1 ) et on pose A ( s , p ) . On considère le cercle c de diamètre [AJ] de centre K .

**Une équation du cercle c**

M ( x , y ) appartient au cercle c si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{JM} = 0$
M ( x , y ) appartient au cercle c si et seulement si $x(x - s) + (y - 1)(y - p) = 0$
M ( x , y ) appartient au cercle c si et seulement si $x^2 - s x + p + y^2 - (p + 1) y = 0$

**Conséquence** M appartient à $c \cap (OI)$ si et seulement si $x^2 - s x + p = 0$ et $y = 0$ .

**Intersection de la droite ( OI ) et du cercle c**

K est le milieu du segment [AJ] donc K $\left( \frac{s}{2} , \frac{p+1}{2} \right)$ .

B est le projeté orthogonal de K sur ( OI ) . B $\left( \frac{s}{2} , 0 \right)$ . KB $= \left| \frac{p+1}{2} \right|$.

Le rayon r du cercle c est égal à $\frac{JA}{2}$ . $JA^2 = s^2 + (p - 1)^2$ .
Si KB < r alors la droite ( OI ) coupe le cercle c en deux points U et V .
Si KB = r alors la droite ( OI ) est tangente au cercle c au point B .
Si KB > r alors la droite ( OI ) et le cercle c n'ont aucun point commun .

On va donc comparer KB et r ce qui revient à comparer $KB^2$ et $r^2$ .
$$r^2 - KB^2 = \frac{s^2 + (p-1)^2}{4} - \left( \frac{p+1}{2} \right)^2 = \frac{s^2 + (p-1)^2 - (p+1)^2}{4} = \frac{s^2 - 4p}{4} = \frac{d}{4} .$$
Si d > 0 alors la droite ( OI ) coupe le cercle c en deux points distincts U et V et l'équation E a deux solutions réelles distinctes qui sont les abscisses u et v des points U et V .
La droite ( KB ) est orthogonale à la droite ( UV ) et passe par K qui est équidistant de U et V donc les points U et V sont symétriques par rapport au point B .

Le triangle KBV est rectangle en B donc $BV^2 = KV^2 - KB^2 = \frac{d}{4}$ donc $BV = \frac{\sqrt{d}}{2}$ .

On obtient alors que $u = \frac{s}{2} - \frac{\sqrt{d}}{2}$ et $v = \frac{s}{2} + \frac{\sqrt{d}}{2}$ .
Si d = 0 la droite ( OI ) est tangente au cercle c au point B et l'équation E a une seule solution réelle qui est l'abscisse du point B c'est à dire $\frac{s}{2}$ .
Si d < 0 alors la droite ( OI ) et le cercle c n'ont aucun point commun et l'équation E n'a pas de solution réelle .

**Figure 1** **cas d > 0 .** s = 4 , p = – 5 , d = 36 , u = – 1 , v = 5 .

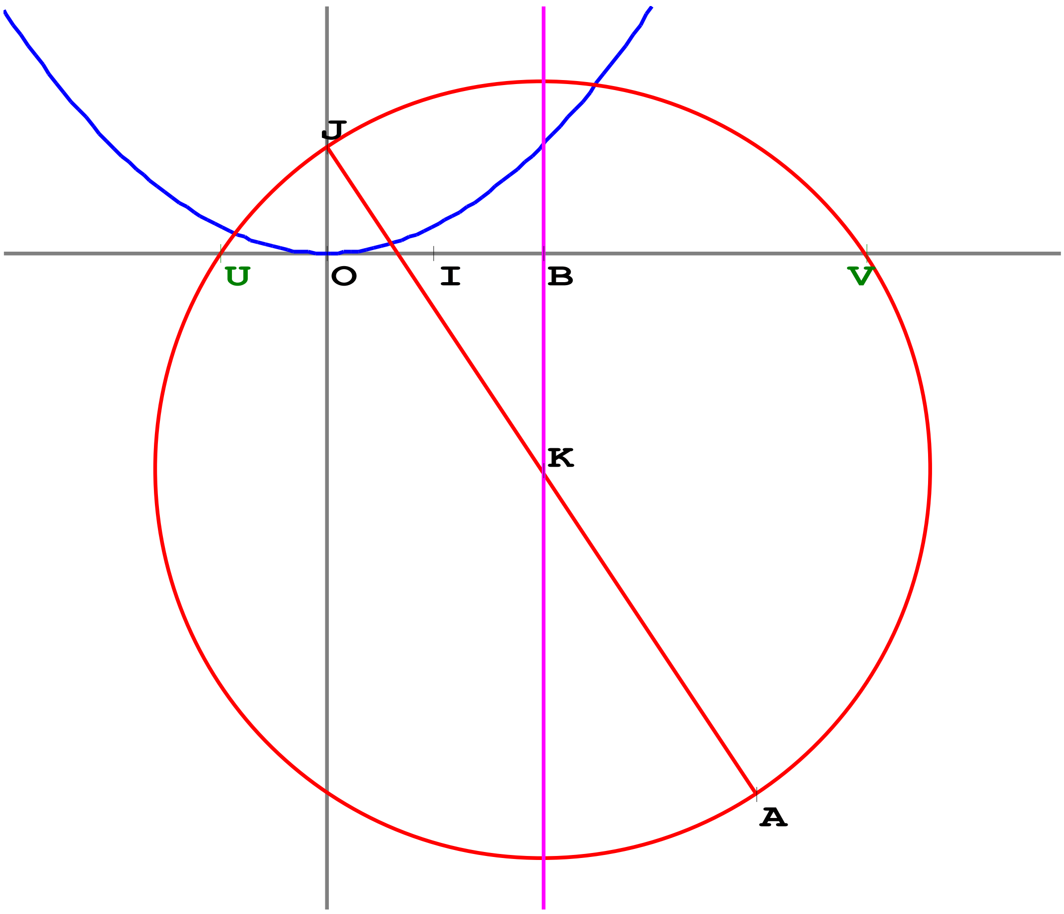
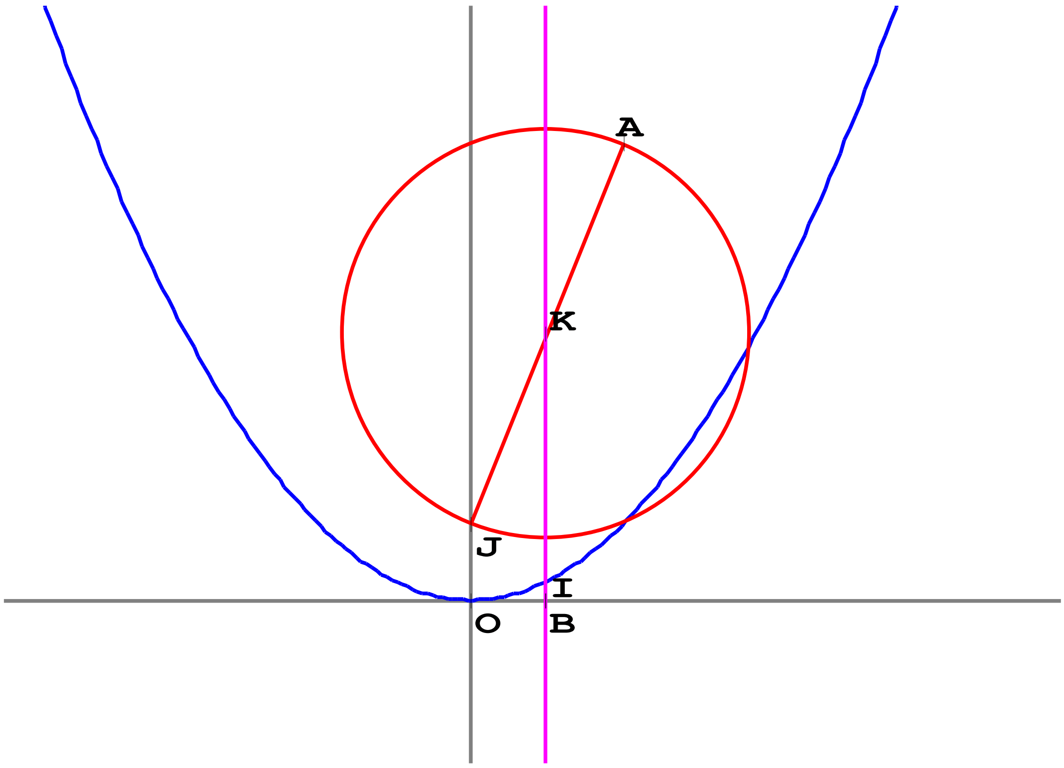



**Figure 2** **cas d < 0 .** s = 2 , p = 6 , d = – 20 , u et v n’existent pas .



E est l'équation $z^2 - s z + p = 0$ où s et p sont des réels donnés et z l'inconnue complexe .
On sait résoudre de manière algébrique l'équation E . On pose $d = s^2 - 4p$ .
On se propose de résoudre de manière géométrique l'équation E .

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct ( O , I , J ) .
J ( 0 , 1 ) et on pose A ( s , p ) .
K est le milieu du segment [AJ] . K $\left( \frac{s}{2} , \frac{p+1}{2} \right)$ .

P est le milieu du segment [KJ] . P $\left( \frac{s}{4} , \frac{p+3}{2} \right)$

B est le projeté orthogonal de K sur la droite ( OI ) . B $\left( \frac{s}{2} , 0 \right)$ .

L est le milieu du segment [KB] . L $\left( \frac{s}{2} , \frac{p+1}{4} \right)$ .

**Cas où d > 0**

Les solutions de l'équation E sont les réels $\frac{s - \sqrt{d}}{2}$ et $\frac{s + \sqrt{d}}{2}$ .

On aura besoin de $4 KP^2 - KB^2$ .
$4 KP^2 - KB^2 = 4 \left( \frac{s^2}{16} + \frac{(p-1)^2}{16} \right) - \frac{(p+1)^2}{4} = \frac{s^2 - 4p}{4} = \frac{d}{4}$ .

c1 est le cercle de centre P passant par K et c2 est le cercle de centre K passant par B .
Les cercles c1 et c2 sont sécants en deux points signifie que $| KB - KP | < KP < KB + KP$
Les cercles c1 et c2 sont sécants en deux points signifie que $KB - KP < KP$
Les cercles c1 et c2 sont sécants en deux points signifie que $KB < 2 KP$
Les cercles c1 et c2 sont sécants en deux points signifie que $KB^2 < 4 KP^2$
Les cercles c1 et c2 sont sécants en deux points signifie que $0 < 4 KP^2 - KB^2$
Les cercles c1 et c2 sont sécants en deux points signifie que $0 < d$
Les cercles c1 et c2 se coupent en deux points M et N .

M appartient au cercle c1 de diamètre [KJ] donc le triangle JKM est rectangle en M
donc $JM^2 = KJ^2 - KM^2 = 4 KP^2 - KB^2 = \frac{d}{4}$ donc $JM = \frac{\sqrt{d}}{2}$ .

On considère le cercle c3 de centre B et de rayon $JM = \frac{\sqrt{d}}{2}$ .

Le cercle c3 coupe la droite ( OI ) en deux points U et V .
U a pour coordonnées $\left( \frac{s - \sqrt{d}}{2} , 0 \right)$ et V a pour coordonnées $\left( \frac{s + \sqrt{d}}{2} , 0 \right)$
Les abscisses respectives u de U et v de V sont les réels distincts solutions de l'équation E .

**Cas où d < 0**

Les solutions de l'équation E sont les complexes $\dfrac{s - i\sqrt{-d}}{2}$ et $\dfrac{s + i\sqrt{-d}}{2}$ .

On aura besoin de $JA^2 - 4\,KB^2$ .
$JA^2 - 4\,KB^2 = s^2 + (p - 1)^2 - (p + 1)^2 = s^2 - 4\,p = d$ .

c4 est le cercle de centre K passant par A . c5 est le cercle de centre L passant par B .

Les cercles c4 et c5 sont sécants en deux points signifie que $|\,KA - LB\,| < KL < KA + LB$
Les cercles c4 et c5 sont sécants en deux points signifie que $2\,KA - KB < KB < 2\,KA + KB$
Les cercles c4 et c5 sont sécants en deux points signifie que $JA < 2\,KB$
Les cercles c4 et c5 sont sécants en deux points signifie que $JA^2 - 4\,KB^2 < 0$
Les cercles c4 et c5 sont sécants en deux points signifie que $d < 0$
Les cercles c4 et c5 se coupent en deux points F et G .

G appartient au cercle c5 de diamètre [KB] donc le triangle FKB est rectangle en F
donc $BF^2 = KB^2 - KF^2 = KB^2 - \dfrac{JA^2}{4} = -\dfrac{d}{4}$ donc $BF = \dfrac{\sqrt{-d}}{2}$ .

On considère le cercle c6 de centre B et de rayon $BF = \dfrac{\sqrt{-d}}{2}$ .
Le cercle c6 coupe la droite ( KB ) en deux points T et R .

T a pour coordonnées $\left(\dfrac{s}{2}\,,\, -\dfrac{\sqrt{-d}}{2}\right)$ et R a pour coordonnées $\left(\dfrac{s}{2}\,,\, \dfrac{\sqrt{-d}}{2}\right)$ .
Les affixes t de T et r de R sont les complexes conjugués solutions de l'équation E .

**Cas où d = 0**

On peut utiliser l'une ou l'autre des constructions précédentes .

**Figure 1** **cas d** > 0 . s = 7 , p = 6 , d = 25 , u = 1 , v = 6 .

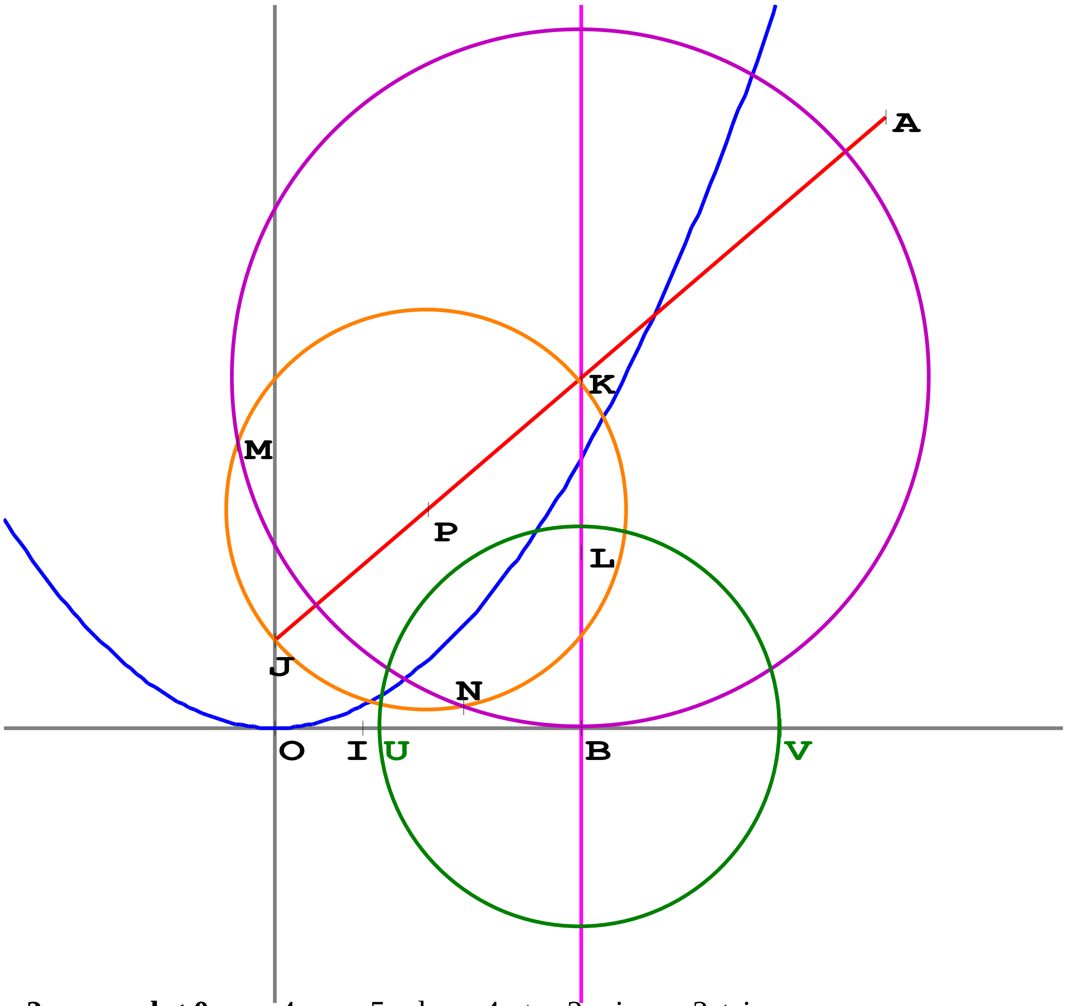



**Figure 2** **cas d < 0 .** s = 4 , p = 5 , d = – 4 , t = 2 – i , r = 2 + i .