Roger Mansuy

Introduction aux graphes aléatoires

(et à la méthode probabiliste)

Calvage & Mounet

Roger Mansuy
Probabiliste de formation, Roger Mansuy est désormais professeur en classes préparatoires au Lycée Saint-Louis. Il est l'auteur d'une dizaine d'ouvrages à destinations des étudiantes et étudiants de l'enseignement supérieur et aime partager son enthousiasme et sa curiosité dans de nombreux contextes.
roger.mansuy@ac-paris.fr

Mathematics Subject Classification (2010) :

05C-80 Random graphs
05C-63 Infinite graphs
60C-05 Combinatorial probability

ISBN 978-2-916352-81-7

9 782916 352817

∞ Imprimé sur papier permanent

Préface

Quels que soient les progrès des connaissances humaines, il y aura toujours place pour l'ignorance et par suite pour le hasard et la probabilité.
Émile Borel, Le hasard

Les graphes aléatoires sont l'objet d'un passionnant domaine mathématique à l'intersection de l'étude des graphes et des probabilités (discrètes). Chacun des sujets est abordé en premier cycle (et l'on a même croisé des exercices sur ce sujet dans les oraux de concours comme on peut le constater en lisant [KM18] ou [BMV17]). Or, les graphes, comme beaucoup de mathématiques discrètes, sont étudiés dans les cours d'informatique et les probabilités sont trop souvent associées à des questions de modélisation : les étudiants ont par conséquent rarement l'occasion de percevoir tout le charme de cette théorie à l'interface.

Ce petit volume vise à corriger ce manque en fournissant une introduction accessible à n'importe quel étudiant en mathématiques (fin de première année, que cela soit à l'université ou en classes préparatoires) curieux de découvrir de beaux objets et les résultats intéressants et parfois contre-intuitifs que l'on peut facilement obtenir en les manipulant. Fidèle à cet objectif, j'ai conclu chaque chapitre par une liste raisonnable d'exercices corrigés et commentés.

– Plan de l'ouvrage –

Le texte se découpe en une dizaine de chapitres rassemblés en quatre parties.

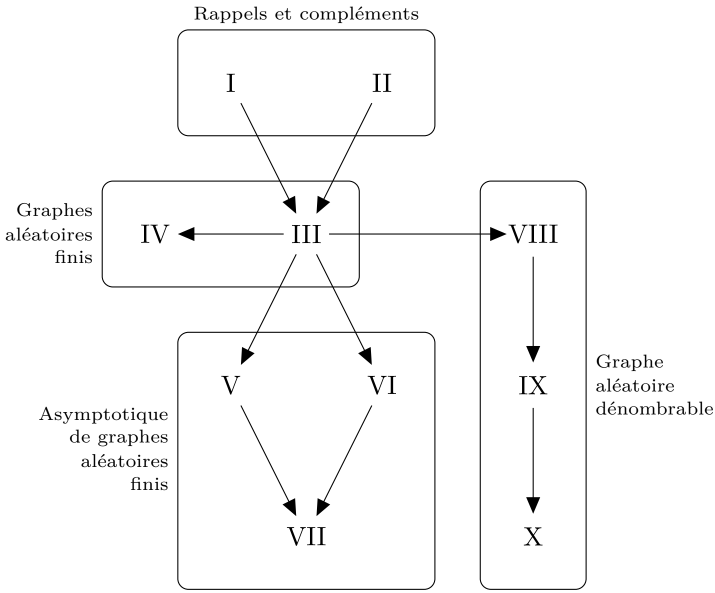
La première partie précise quelques points des deux théories sous-jacentes : les graphes et les probabilités. Il ne s'agit pas ici d'un cours complet (pour lequel il existe de très nombreux traités) mais de compléments permettant de lire sans encombre le reste de l'ouvrage. On insiste par exemple sur l'importance des variables aléatoires indicatrices, si utiles pour décrire les variables de comptage.

La deuxième partie présente les graphes aléatoires finis. Si l'on se concentre d'abord sur le modèle binomial (quelquefois appelé de manière ambiguë graphe d'Erdős-Rényi), on développe tout de même le modèle uniforme et les applications obtenues avec la méthode probabiliste (c'est-à-dire des résultats déterministes sur les graphes obtenus en passant par les probabilités et des graphes aléatoires).

La troisième partie répond à une question simple : comment évolue un graphe aléatoire lorsque sa taille tend vers $+\infty$? Plus précisément, on met en évidence des comportements distincts (selon la valeur de paramètres) pour la limite de probabilités calculées sur le graphe aléatoire et l'on étudie un intrigant effet de « seuil » ou de « transition de phase ». Cette partie exploite judicieusement des calculs de moments (espérance et variance notamment) de variables aléatoires et les inégalités probabilistes classiques.

Pour la dernière partie, on abandonne les graphes aléatoires finis et leurs limites pour considérer directement un graphe aléatoire infini dénombrable. On vérifie alors que ce graphe jouit de nombreuses propriétés d'universalité, d'homogénéité et de robustesse. La propriété d'extension garantit notamment son unicité (à isomorphisme près) et permet de le réinterpréter à partir de constructions déterministes variées, notamment arithmétiques.

Voici le « graphe » des dépendances entre chapitres et parties :



On remarque que cette structure oriente naturellement vers les chapitres IV, VII et X, points d'orgue de ce petit ouvrage : les résultats qu'ils contiennent apporteront sans aucun doute de grandes satisfactions mathématiques aux lecteurs.

En revanche, il n'apparaît pas clairement que certaines idées ou méthodes (comme, par exemple, l'utilisation fréquente des variables aléatoires indicatrices) traversent l'ensemble des chapitres, c'est pourtant un élément important pour toute personne qui travaillera avec cet outil.

La rédaction de cet ouvrage repose sur le principe de chapitres courts, rythmés par des sections d'exercices qui complètent logiquement le contenu du cours. Il est donc conseillé de chercher activement ces exercices avant de lire leurs corrections détaillées[1].

1. Au moment des relectures, voici mes exercices favoris : I-7.9, IV-5.3, IV-5.6, V-4.3, IX-6.4 et X-4.3.

– *Remerciements* –

Slavik Bourguignon et Pierre Sibut-Bourde ont, par leurs relectures et leurs judicieux commentaires, permis d'améliorer la qualité de cet ouvrage pendant la rédaction. Qu'ils soient remerciés de leurs efforts dévoués.

Mon collègue, Laurent Truchot, a assuré l'ultime relecture détectant coquilles et maladresses. Son travail a été particulièrement efficace : merci à lui !

Il va de soi que j'assume l'entière responsabilité des éventuelles erreurs qui resteraient. N'hésitez pas à me faire part de vos commentaires (si possible constructifs) et questions sur cet ouvrage. Bonne lecture !

Roger Mansuy
Bagneux, le 17 décembre 2019

Table des matières

Graphes aléatoires finis

III. Modèle binomial $\mathscr{G}_{n,p}$

IV. Méthode probabiliste

Asymptotique de graphes aléatoires finis

V. Méthode du premier moment

VI. Méthode du deuxième moment