

Hervé Queffélec – Martine Queffélec

Analyse complexe et applications

Nouveau tirage

Cours et exercices



Calvage & Mounet

MARTINE ET HERVÉ QUEFFÉLEC résident à Lille. Leurs travaux de recherche portent sur l'Analyse sous toutes ses formes : fonctionnelle, harmonique, complexe, etc. . .

Maintenant chercheurs émérites à l'Université de Lille 1, ils ont été pendant plusieurs années membres du jury de l'agrégation, ou préparateurs à l'agrégation. Ils sont les auteurs, ensemble ou séparément, de plusieurs ouvrages d'enseignement ou de recherche en Mathématiques.

Martine.Queffelec@univ-lille.fr

Herve.Queffelec@univ-lille.fr

Mathematics Subject Classification (2000) :

- 11 J–Number Theory
- 12 D–Field theory and Polynomials
- 28 A–Measure and Integration
- 30 A–Functions of a complex variable
- 33 B–Special functions
- 44 A–Integral transforms, Operational Calculus
- 46 J–Functional Analysis
- 47 A–Operator Theory
- 60 E–Probability Theory and Stochastic Processes

Mots-clefs : contour, pôle, résidu, singularité, indice

∞ Imprimé sur papier permanent

© Calvage & Mounet, Paris, 2017

Nouveau tirage, bonifié et corrigé, septembre 2019

ISBN 978-2-916352-59-6



9 782916 352596

À Clémence et Dominique

Préface

Contemplata aliis tradere...

1. Les nombres complexes et les prérequis

Les nombres complexes — qui ne le sont pas tant — ont à nos yeux d'analystes une structure incomparablement plus riche que celle des nombres réels ; par exemple, la topologie du plan est infiniment plus complexe (!) que celle de la droite : les parties connexes sont autrement compliquées que les intervalles de \mathbb{R} , la notion nouvelle de simple connexité apparaît, sans parler des notions d'indice, de courbe de Jordan, etc.

Et même, à ceux qui ont juré de rester dans le « monde réel », il faut rappeler cette phrase de Painlevé : « Le chemin le plus court entre deux vérités réelles passe souvent par le domaine complexe. » On en veut pour preuve le calcul de la somme réelle $S = 1 + \cos x + \dots + \cos nx$, un des premiers enthousiasmes mathématiques des auteurs, consistant à passer à la somme complexe $1 + e^{ix} + \dots + e^{inx}$, qui est celle d'une progression géométrique et donc calculable sous forme « close », puis à revenir aux parties réelles. Bien sûr, si l'on connaît déjà la réponse, on peut parachuter une autre méthode : on forme $2 \sin(x/2) \times S$, faisant ainsi apparaître une somme télescopique... Quoiqu'il en soit, cette méthode qui consiste à complexifier-exploiter-atterrir se révèle extrêmement féconde, et sera en filigrane dans tout l'ouvrage (voir par exemple l'indécomposabilité des lois de Poisson en Probabilités).

Mais entrons un peu plus dans les détails : les prérequis se limitent à une bonne familiarité avec l'Analyse enseignée en deuxième année (suites, séries, calcul intégral, calcul différentiel, topologie du plan) ; d'ailleurs, au chapitre I, le lecteur trouvera une introduction à l'exponentielle complexe, avec en application la forme polaire des nombres complexes et la définition axiomatique du nombre π , choses impossibles à traiter rigoureusement sans

cette fonction exponentielle. Il trouvera également des révisions sur les espaces topologiques compacts et connexes, les deux notions jouant dans ce livre un rôle essentiel, ainsi que quelques éléments de la théorie des séries de Fourier.

En ce qui concerne l'intégration, la théorie de Riemann suffit ici puisque les fonctions à intégrer sont continues (pour le moins) mais on se permettra d'utiliser les théorèmes de convergence issus de la théorie de Lebesgue pour le confort qu'ils apportent (lemme de Fatou, théorème de convergence dominée, de Fubini, de changement de variable, etc.); les principaux résultats de calcul différentiel à plusieurs variables sont rappelés (théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites) et l'on se limite bien évidemment à la dimension finie. On pourra réviser tous ces thèmes dans les livres cités dans la bibliographie.

À la fin de cet ouvrage, quand on traite les applications, il est fait appel à des connaissances solides, quoiqu'élémentaires, de troisième ou de quatrième année ([Ru2]), l'algèbre des polynômes et les nombres algébriques, la théorie élémentaire des Probabilités ([Li]) et la théorie des opérateurs sur un espace de Hilbert.

2. Des polynômes aux fonctions holomorphes

« Holomorphe », juxtaposition de mots grecs signifiant « entier » et « forme ». Nous sommes loin de pouvoir prétendre aujourd'hui, comme le faisait Tristotin, « Et sait du grec, madame, autant qu'homme de France ! » : les mots de grec ancien font peur et le mot « holomorphe » ne fait pas exception à la règle. Or, soyons réalistes :

▷ *f dérivable* veut dire

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ admet une limite quand } h \text{ réel} \rightarrow 0.$$

▷ *f holomorphe* veut dire

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \text{ admet une limite quand } h \text{ complexe} \rightarrow 0.$$

Il s'agit donc *exactement de la même notion*, à cela près que dans le second cas l'accroissement h est complexe. Et il n'est pas plus dur de montrer que la dérivée de z^n est nz^{n-1} que de montrer que celle de x^n est nx^{n-1} . C'est pourquoi nous donnons dans ce livre, au début tout au moins, une grande place aux polynômes. Ces polynômes sont des sommes finies, donc les problèmes de convergence de série sont absents et les détails techniques bien

plus simples. Et ce sont des fonctions holomorphes particulières, sur lesquelles beaucoup de phénomènes fondamentaux apparaissent : analyticité, propriété de la moyenne, principe du maximum, etc. Et l'on pourrait dire que, lorsqu'on a compris avec les polynômes, on a tout compris (i.e. le cas général des fonctions holomorphes). Il ne faut pas se dissimuler qu'il y a quelques différences : un polynôme non constant a toujours des racines complexes (théorème de d'Alembert-Gauss), la fonction exponentielle e^z n'en a aucune. Mais il s'en faut de peu (la fonction $e^z - a$ s'annule dès que $a \neq 0$) et cela correspond à un phénomène général (théorème de Picard, qui sera prouvé au chapitre VI de ce livre). Enfin, même si la notion d'holomorphie est une généralisation banale de celle de dérivabilité, elle se trouve être possédée par très peu de fonctions, et elle est d'une grande rigidité, puisqu'elle équivaut à une autre notion, celle d'analyticité. Cette équivalence extrêmement utile n'est pas facile à prouver, et demande à elle seule une mini-théorie, appelée théorie de Cauchy. Il y a en fait deux telles théories : la théorie de Cauchy locale, et la théorie de Cauchy globale. Elles sont toutes les deux présentées dans ce livre ; la première suffit souvent. Mais quand on a cette équivalence holomorphie-analyticité, les récompenses pleuvent. Nous espérons que cet ouvrage en convaincra le lecteur.

3. Les exercices corrigés

Un choix d'exercices est proposé à la fin de chaque chapitre, certains élémentaires, d'autres plus élaborés, qui suivent grosso modo la progression du chapitre (et donc pas nécessairement de difficulté croissante). L'ouvrage en comporte plus d'une centaine, un astérisque signalant quelques énoncés plus difficiles. On ne saurait trop recommander de s'y essayer pour s'approprier les nouvelles notions du cours. On trouvera le corrigé détaillé de chacun d'eux, à une ou deux exceptions près.

4. Dessins

Il ne suffit pas d'écrire un texte, encore faut-il savoir le transformer en un bel objet-livre, clairement présenté, agréable à feuilleter, et contenant de nombreux dessins, particulièrement indispensables dans un ouvrage sur la variable complexe. Il est certain que sans la collaboration et la compétence d'Alain Debreil, le manuscrit serait resté à l'état d'esquisse, privé de figures que nous aurions été incapables de réaliser à l'ordinateur. Alain a accompli en un temps record un travail colossal de mise en forme, de vérification, de création de références internes et de composition des figures. Il y en a plus de cinquante... Qu'il en soit chaleureusement remercié ici.

5. Remarques techniques

Les imperfections du texte sont évidemment inévitables, mais certaines sont volontaires : nous pensons par exemple au choix assumé de parler de la fonction $f(z) =$ (s'ensuit une expression symbolique en z) alors qu'il faudrait parler de la fonction $f : z \mapsto f(z)$ avec la lourdeur qui en découle. Nous avons fait le pari pascalien de croire que le lecteur sait distinguer la fonction f et la valeur $f(z)$ de f au point $z \dots$

Au-delà des symboles, nous tablons donc sur la bonne compréhension des objets en jeu, tout en sachant que la confusion (quand on manipule des familles de tels objets) reste possible.

Nous avons aussi choisi délibérément de noter \log la fonction « logarithme » en complexe comme en réel, alors qu'il s'agit d'un « logarithme népérien » noté classiquement \ln . Outre que cela donne des résultats particulièrement laids et ambigus dans certaines expressions (comme $\sqrt{\ln(\ln(n))}$ dans la loi du logarithme itéré des Probabilités, pauvre Hélène), il nous paraît inutile de préciser le côté népérien. En variable complexe, on n'utilise jamais d'autre base que la base e des logarithmes népériens.

Un autre choix assumé est la place que nous avons donnée aux produits infinis dans le chapitre VII. D'une part, la notion est aussi naturelle que celle de série, tout en comportant quelques pièges qu'il convient d'éviter et qui sont décrits ici. D'autre part, la notion est d'une utilité fondamentale (produits de Blaschke, de Weierstrass, d'Euler) dans plusieurs domaines, tels que la théorie analytique des nombres. Enfin, la notion est souvent mal comprise par les étudiants. Nous espérons avoir réussi à la rendre accessible ici.

6. Les applications

Il s'agit là d'un des aspects du livre auquel nous tenons le plus. Notre fascination pour les fonctions holomorphes tient à ce que, avec un peu d'imagination, elles peuvent s'appliquer de façon totalement inattendue à quantité d'autres domaines : nous pensons par exemple au théorème de Kahane-Gleason-Zelazko sur les formes linéaires multiplicatives, traité en exercice au chapitre IX, ou au théorème de Fuglede sur les opérateurs normaux, traité au chapitre XII. Un autre livre (en anglais, et rédigé de manière très concise) de Lax et Zalzman (« Complex proofs of real theorems » University lecture Notes 58, AMS 2012) traite en quatre-vingt-dix pages de quelques applications des variables complexes. Certaines sont absentes de notre livre. Mais il en contient bien d'autres, qui font l'objet des cinq derniers chapitres (sans parler du chapitre V sur le théorème des résidus et ses applications à des calculs non triviaux d'intégrales ou de sommes de séries).

Sans trop entrer dans les détails ici, mentionnons par exemple :

- ▷ 1. l'homéomorphie de deux ouverts simplement connexes du plan comme retombée du théorème de représentation conforme de Riemann, et l'approche par espaces de Hardy de l'inégalité isopérimétrique au chapitre VIII ;
- ▷ 2. l'identité d'Abel et les polynômes orthogonaux au chapitre IX ;
- ▷ 3. la théorie des nombres (algébriques, transcendants) au chapitre X ;
- ▷ 4. les Probabilités (notamment le problème des moments et le principe d'incertitude) au chapitre XI ;
- ▷ 5. l'Analyse fonctionnelle au chapitre XII (avec les beaux théorèmes de Fuglede, von Neumann, Titchmarsh, ce dernier comme retombée des sous-espaces invariants de l'opérateur de Volterra) ;
- ▷ 6. les opérateurs à trace, les déterminants de Grothendieck, et le délicieux théorème de Lidskii « la trace est la somme des valeurs propres » au chapitre XIII.

7. Pour qui, pourquoi, ce livre ?

Ce livre s'adresse à tous les étudiants qui découvrent les fonctions d'une variable complexe, c'est-à-dire, les étudiants de troisième année de la *Licence de mathématiques* (L3, voire L2 selon les cursus), certains étudiants de la *Licence de physique* à la recherche d'une approche rigoureuse des nombres complexes dont ils feront amplement usage par la suite ou ceux du *Master de mathématiques* qui veulent approfondir les résultats fondateurs de la théorie en vue de l'étude ultérieure d'ouvrages plus avancés, soit vers des développements mathématiques plus récents (par exemple les « espaces de Banach de fonctions holomorphes »), soit vers l'utilisation en Physique ; par ses applications dans des domaines variés (Probabilités, Géométrie, Théorie des nombres, etc.), le livre nous paraît aussi particulièrement adapté aux *candidats à l'agrégation de mathématiques*, qui trouveront dans les cinq derniers chapitres de quoi alimenter leurs leçons d'oral d'Analyse.

Le présent texte est issu d'un polycopié de la faculté d'Orsay, écrit par les auteurs à destination d'étudiants salariés amenés à travailler seuls en s'appuyant aussi sur des exercices corrigés. Dans ce polycopié, le point de vue « polynômes » jouait un rôle essentiel. Il en est de même dans cet ouvrage.

8. Remerciements

Notre ami et éditeur Rached Mneimné nous a incités à rédiger et à développer ce polycopié, ce que nous avons fait ; nous le remercions chaleureusement pour ses encouragements amicaux, sa longue patience, ses fructueux conseils, dont le moindre n'est pas de nous avoir recommandé de contacter Alain Debreil, dont nous parlons plus haut, pour les dessins !

Une mention spéciale doit être faite du travail de Bruno Calado, que certains qualifient de relecteur terrifiant, on pourrait aussi dire « terrific » au sens le plus louangeur du terme ! Avec une grande gentillesse, Bruno a accepté de nous aider de son immense culture et de son coup d'œil d'aigle, en relisant ligne à ligne l'intégralité du manuscrit et en faisant tous les exercices. Il a débusqué un nombre incroyable de coquilles, petites ou pas, et nous a permis des améliorations considérables du texte initial. Qu'il en soit très chaleureusement remercié ici.

Nous nous souvenons d'une phrase d'Adrien Douady dans la préface de son livre avec Régine Douady :

« Ses vagabondages mathématiques le ramèneront toujours aux nombres complexes. »

C'est un peu dans cet esprit que ce livre a été écrit.

H. et M. Queffélec

Lille, février 2017

9. À l'occasion du présent tirage

Tous les auteurs de livres ou d'articles scientifiques le savent : la chasse à la coquille est un travail de Sisyphe, toujours à recommencer par définition. La première édition n'a pas échappé à cette règle, malgré tous nos efforts. Mais nous avons tenté de mettre à profit ce nouveau tirage sur les points suivants.

1. Les coquilles ou erreurs détectées par nous-mêmes ou nos collègues — que nous remercions — ont été aussi soigneusement que possible « éradiquées ».
2. Plus d'une douzaine d'exercices ou problèmes nouveaux ont été ajoutés. Ces ajouts ont été effectués systématiquement en fin des chapitres correspondants.
3. Des lacunes (grand théorème de Picard, exemples de transformations conformes, fonctions harmoniques, etc.) ont été comblées, et des compléments (approximation de Bernstein, polynômes de Faber, exposant de Lyapounov) ont été apportés.
4. Près d'une dizaine de dessins a également été ajoutée.

L'éditeur a, de son côté, apporté une amélioration sensible à la mise en page, rendant ainsi le texte encore plus avenant.

Nous espérons que cette nouvelle version, ainsi complétée, pourra rendre davantage de services aux lecteurs potentiels.

Les auteurs
Lille, août 2019

Table des matières

Introduction

1. Les nombres complexes et les prérequis	xi
2. Des polynômes aux fonctions holomorphes	xii
3. Les exercices corrigés	xiii
4. Dessins	xiii
5. Remarques techniques	xiv
6. Les applications	xiv
7. Pour qui, pourquoi, ce livre ?	xv
8. Remerciements	xv
9. À l'occasion du présent tirage	xvii

I. Quelques rappels

1. Rappels de topologie du plan complexe.	1
1.1. Ouverts de \mathbb{C}	2
1.2. Connexes de \mathbb{C}	2
2. L'exponentielle complexe	4
2.1. Définition	4
2.2. L'exponentielle dans le champ réel	6
2.3. L'exponentielle dans le champ complexe	6
2.4. Module et argument d'un nombre complexe	9
2.5. Vers le logarithme complexe	9
3. Rappels d'analyse de Fourier	10
4. Polynômes, fractions rationnelles	16
4.1. Aspect algébrique des polynômes	16
4.1.1. Polynômes de $k[X]$, k corps commutatif	17
4.1.2. Polynômes de $\mathbb{Z}[X]$	18
4.2. Relations coefficients-racines	20
4.3. Formules de Newton et Waring	21
4.4. Fractions rationnelles de $\mathbb{C}(X)$	23
5. Exercices	24
6. Correction des exercices	27

II. Polynômes et séries entières

1. Aspect holomorphico-analytique des polynômes	35
2. Zéros d'un polynôme non constant	37
2.1. Théorème de d'Alembert-Gauss	37
2.2. Théorème de Gauss-Lucas	40
2.3. Formule de Jensen	40
2.4. Mesure de Mahler et hauteur	43
3. Formule d'interpolation de Lagrange	47
3.1. Position du problème	47
3.2. Applications de la formule de Lagrange	48
3.2.1. Inégalité de Schur	48
3.2.2. Inégalités de Bernstein et Markov	50
4. Principe du maximum pour un polynôme	52
5. Caractère analytique des séries entières	55
5.1. Rappels	55
5.2. Analyticité des sommes de séries entières	56
6. Exercices	59
7. Correction des exercices	65

III. Fonctions holomorphes

1. Définitions et premières propriétés	76
1.1. Définitions	76
1.2. Premières propriétés	77
1.3. L'exemple des fractions rationnelles	78
1.4. Inversion et logarithme	80
1.5. Une autre approche du logarithme	81
2. Comparaison des points de vue	83
2.1. Une première équivalence	83
2.2. Le théorème fondamental	84
3. Théorie de Cauchy	85
3.1. Chemins et courbes	85
3.2. Intégration le long d'une courbe	87
3.3. Indice d'un point par rapport à une courbe	88
4. Théorème de Cauchy	95
4.1. Généralités	95
4.2. Théorème de Cauchy pour un triangle	95
4.3. Théorème de Cauchy pour un ouvert convexe	97
4.4. Théorème de Cauchy local	98
4.5. Inégalités de Cauchy	102
5. Premières conséquences de l'identité $H(\Omega)=A(\Omega)$	104
5.1. Principe des zéros isolés	104
5.2. Principe de prolongement des identités	105

6. Principes du maximum	106
6.1. Cas des ouverts bornés	106
6.2. Lemme de Schwarz	107
6.3. Cas d'un ouvert quelconque	108
6.4. Principes de Phragmén-Lindelöf	111
6.4.1. Un premier énoncé	111
6.4.2. Un second énoncé	113
6.5. Une application importante	114
7. Exercices	115
8. Correction des exercices	119
IV. Théorème de Cauchy global	
1. La notion de cycle	127
2. Un théorème fondamental de séparation	129
3. Théorème de Cauchy homologique	133
3.1. Cycles homologues à zéro	133
3.2. Un énoncé général	134
4. Développement de Laurent	135
5. Théorème de Runge	138
6. Homotopie et simple connexité	139
6.1. Chemins fermés homotopes	140
6.2. Ouvert simplement connexe	141
7. Propriétés globales des fonctions holomorphes	144
7.1. Existence d'une primitive	144
7.2. Existence du logarithme	145
7.3. Inversion holomorphe	146
7.4. Limites de fonctions holomorphes	148
8. Fonctions harmoniques et sous-harmoniques	149
8.1. Propriété de moyenne	149
8.2. Laplacien	150
9. Formule de Jensen et applications	155
10. Exercices	157
11. Correction des exercices	159
V. Théorème des résidus	
1. Fonctions méromorphes	165
2. Théorème des résidus proprement dit	169
3. Des applications théoriques	171
3.1. Formule de Kronecker	171
3.2. Théorème de Rouché	172
3.3. Préservation de la non-nullité	172

4. Applications aux calculs d'intégrales et de séries	173
4.1. Fraction rationnelle en $\sin t$ et $\cos t$	173
4.2. Fraction rationnelle sans pôles réels	174
4.3. Transformée de Fourier d'une fraction rationnelle	175
4.4. Calcul d'une intégrale semi-convergente	177
4.5. Calcul d'une intégrale où intervient un logarithme	178
4.6. Utilisation de la $2i\pi$ -périodicité de e^z	180
4.7. Calcul de sommes de séries	182
5. Exercices	186
6. Correction des exercices	190

VI. Propriétés des fonctions entières

1. Propriétés élémentaires de \mathcal{E}	207
2. Le « petit » théorème de Picard	212
2.1. Le théorème de l'application ouverte de Bloch	212
2.1.1. Le cas des fonctions bornées	212
2.1.2. Le cas des fonctions quelconques	214
2.2. Retour à la preuve du théorème de Picard	215
3. Le grand théorème de Picard	218
3.1. Le cas des fonctions méromorphes	221
4. Équation de Guichard	222
4.1. Polynômes de Bernoulli	222
4.2. Solution générale de l'équation de Guichard	225
5. Exercices	227
6. Correction des exercices	231

VII. Produits infinis

1. Produits infinis numériques	241
1.1. Définitions	241
1.2. Un théorème fondamental	242
2. Produits infinis de fonctions	244
3. Les produits de Blaschke	244
4. Les produits de Weierstrass	247
4.1. Produits de Weierstrass généraux	247
4.2. Produits de Weierstrass sans exponentielles parasites	251
4.3. Fonctions de Bessel	256
5. Le théorème de Mittag-Leffler	258
6. Les produits d'Euler	259
7. Exercices	261
8. Correction des exercices	267

VIII. Espaces de fonctions holomorphes, transformations conformes

1. L'espace de Fréchet $H(\Omega)$	280
1.1. Métrique complète sur $H(\Omega)$	280
1.2. Théorème des familles normales	281
2. Théorème de représentation conforme de Riemann	284
2.1. Automorphismes du disque	284
2.2. Le cas général	285
2.3. La sphère de Riemann et une application	288
2.4. Exemples de représentations conformes	291
2.5. Polynômes de Faber	297
3. Espaces de Hilbert de fonctions analytiques	301
3.1. Définition générale	301
3.2. Noyau reproduisant	301
4. Exemples	303
4.1. Espace de Hardy	303
4.2. Espace de Bergman	307
4.3. Espace de Dirichlet	315
5. Exercices	316
6. Correction des exercices	320

IX. Premières applications

1. Exponentielles-polynômes	333
2. Unicité de la transformée de Fourier	335
3. Rayon de convergence des séries de Taylor	338
4. Identité d'Abel	339
5. Polynômes orthogonaux	341
5.1. Généralités	341
5.2. Trois exemples	345
5.2.1. Les polynômes de Legendre	345
5.2.2. Les polynômes de Laguerre	348
5.2.3. Les polynômes d'Hermite	351
6. Comportement au bord des séries entières	353
7. Matrice de Hilbert	354
8. Formule de réversion de Lagrange	357
9. Théorème de Müntz	360
10. Points extrémaux dans une algèbre de Banach	365
11. Un exposant de Lyapounov	367
12. Exercices	370
13. Correction des exercices	373

X. Applications en Théorie des nombres

1. Irrationalité et transcendance	381
2. Polylogarithmes et Fonction ζ	382
3. Transcendance du nombre de Thue-Morse	390
3.1. Approximation diophantienne	390
3.2. Un théorème de Mahler	393
4. Fractions rationnelles dans $\mathbb{Q}(X)$	397
5. Nombres de Pisot	400
5.1. Une classe remarquable de nombres algébriques	400
5.2. Un théorème de Salem	403
6. Exercices	406
7. Correction des exercices	410

XI. Applications en Probabilités

1. Indécomposabilité de la loi de Poisson	424
2. Problème des moments	426
3. Principe d'incertitude de Hardy-Heisenberg	429
4. Lois stables	432
5. Matrices aléatoires	437
5.1. Transformée de Stieltjes	437
5.2. Théorème de Lévy-Stieltjes	438
5.3. Loi de Wigner	440
6. Exercices	441
7. Correction des exercices	445

XII. Applications en Analyse fonctionnelle

1. Analogie	453
1.1. Un rappel	453
1.2. Analogie détaillée	454
2. Théorème de Fuglede	456
3. L'algèbre du disque	457
3.1. Les unimodulaires de $\mathcal{A}(\mathbb{D})$	458
3.2. Génération convexe de la boule de $\mathcal{A}(\mathbb{D})$	459
4. L'inégalité de von Neumann	460
5. Sous-espaces invariants du Volterra et application	463
5.1. Le théorème d'unicellularité	463
5.2. Théorème de Titchmarsh	467
6. Exercices	468
7. Correction des exercices	472

XIII. Théorème de Lidskii

1. Opérateurs à trace et norme nucléaire	479
1.1. Norme nucléaire en dimension finie	479
1.1.1. Un rappel	479
1.1.2. Une norme duale sur $\mathcal{L}(H)$	480
1.2. Opérateurs à trace en dimension quelconque	481
1.2.1. Nombres d'approximation	482
1.2.2. L'idéal des opérateurs à trace	483
2. Puissances extérieures	487
2.1. Puissances tensorielles et extérieures d'un espace	487
2.2. Produit tensoriel et extérieur d'opérateurs	490
3. Formule de Lidskii et déterminants de Grothendieck	492
3.1. Le déterminant	493
3.2. La fonction entière caractéristique	496
3.3. Zéros de la fonction entière caractéristique	498
3.4. La conclusion	498
4. Exercices	499
5. Correction des exercices	501

Bibliographie	505
Index	509