

Mathématiques en devenir

101. — Jacques Faraut. *Analyse sur les groupes de Lie. Une introduction*
102. — Patrice Tauvel. *Corps commutatifs et théorie de Galois*
103. — Jean Saint Raymond. *Topologie, calcul diff. et variable complexe*
104. — Clément de Seguis Pazzis. *Invitation aux formes quadratiques*
105. — Bruno Ingrao. *Coniques projectives, affines et métriques*
106. — Wolfgang Bertram. *Calcul différentiel topologique élémentaire*
107. — Henri Lombardi & Claude Quitté. *Algèbre commutative. Méthodes constructives. Modules projectifs de type fini*
108. — Frédéric Testard. *Analyse mathématique. La maîtrise de l'implicite*
109. — Grégory Berhuy. *Modules : théorie, pratique... et un peu d'arithmétique*
110. — Bernard Candelpergher. *Théorie des probabilités. Une introduction élémentaire*
111. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome premier*
112. — Gema-Maria Díaz-Toca, Henri Lombardi & Claude Quitté. *Modules sur les anneaux commutatifs*
113. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome second – encores*
114. — Alain Debreil. *Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes*
115. — François Rouvière. *Initiation à la géométrie de Riemann*
116. — Nikolaï Nikolski. *Matrices et opérateurs de Toeplitz*
117. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome premier*
118. — Martine et Hervé Queffélec. *Analyse complexe et applications*
119. — Alain Debreil, Jean-Denis Eiden, Rached Mneimné et Tuong-Huy NGuyen. *Formes quadratiques et géométrie*
120. — Christian Leruste. *Topologie algébrique – Une introduction, et au-delà*
121. — Grégory Berhuy. *Algèbre : le grand combat*
122. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome second*
123. — Jacques Faraut. *Analyse sur les groupes de Lie, une introduction. Nouvelle édition revue et augmentée*
124. — Charles-Michel Marle. *Géométrie symplectique et géométrie de Poisson*
125. — Pascal Boyer. *Petit compagnon des nombres et de leurs applications*

Bernard Candelpergher

Théorie des probabilités

Une introduction élémentaire

Nouveau tirage, corrigé et bonifié



Calvage & Mounet

BERNARD CANDELPERGHES est maître de conférences honoraire à l'université de Nice. Ses travaux de recherche se situent dans le domaine de l'Analyse et concernent les procédés de sommation de séries divergentes et l'étude de certains aspects mathématiques de la physique quantique. Il est l'auteur de *Fonctions d'une variable complexe*, chez Armand Colin (1995), du *Calcul intégral*, chez Cassini (2009), et plus récemment (en septembre 2017) d'un « lecture notes » chez Springer, intitulé *Ramanujan Summation of Divergent Series*.

candel@unice.fr

Mathematics Subject Classification (1991) – Primary :

- 05-01 Combinatorics (Instructional exposition)
- 28-01 Measure and Integration (Instructional exposition)
- 28-A05 Measurable sets
- 28-A25 Integration with respect to measures
- 28-A35 Measures and integrals in product spaces
- 60-01 Probability Theory and Stochastic Processes (Instructional exposition)
- 60-A05 Foundations of probability theory (General questions)
- 60-A10 Foundations of probability theory (Probabilistic measure theory)
- 60-B10 Foundations of probability theory (Convergence of probability measures)
- 60-E05 Distribution theory (General theory)
- 60-E05 Distribution theory (Characteristic functions)
- 60-F05 Central limit and other weak theorems
- 60-F15 Strong theorems
- 60-G05 Foundations of stochastic processes
- 60-G42 Martingales with discrete parameter
- 60-G42 Sums of independent random variables ; random walks

ISBN 978-2-9163-5213-8



∞ Imprimé sur papier permanent

© Calvage & Mounet, Paris, 2013
Nouveau tirage corrigé, Paris, 2019

À mon cher Arthur

Avant-propos

Le Calcul des Probabilités intervient dans de nombreux domaines où l'on doit étudier des phénomènes soumis à des variations aléatoires. Ce calcul est né du besoin de quantifier le probable. La première question qui se pose est celle de la définition de la probabilité d'un événement A . Dans les situations où le nombre d'éventualités possibles est fini, on pourrait espérer se ramener à un problème de dénombrement, en utilisant la formule :

$$\text{probabilité de } A = \frac{\text{nombre d'éventualités favorables à } A}{\text{nombre d'éventualités possibles}}.$$

Mais l'on se rend immédiatement compte qu'elle ne peut constituer une définition générale de la probabilité. En effet, elle n'est admissible que si toutes les éventualités possibles ont la même chance de se réaliser, ce qui suppose déjà une définition de la probabilité.

Le formalisme mathématique qui permet de contourner cette difficulté a été introduit en 1933 par Kolmogorov et est aujourd'hui communément utilisé.

Le but de ce livre est de donner une présentation rigoureuse des bases mathématiques de cette théorie tout en essayant de garder une interprétation intuitive des probabilités.

Donnons maintenant un brève présentation des idées essentielles qui sont présentées dans les chapitres de ce livre.

Le formalisme de Kolmogorov consiste à adopter une définition axiomatique de la probabilité en utilisant la théorie des ensembles. Dans ce formalisme, les éventualités possibles, lors d'une expérience, forment un ensemble Ω et les événements sont représentés par des parties de Ω . Chaque occurrence de l'expérience donne lieu au choix aléatoire d'une éventualité ω dans Ω et un événement A est réalisé si cette éventualité appartient à la partie A . La distribution de la probabilité sur l'ensemble des éventualités se traduit, dans ce formalisme, par la donnée d'une mesure sur Ω , c'est-à-dire d'une application

$$P : A \mapsto P(A)$$

qui vérifie le même axiome que la mesure « géométrique » de longueur ou d'aire pour les parties d'une droite ou d'un plan, l'axiome d'additivité :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$$

si les A_n sont des parties deux à deux disjointes.

La justification de cet axiome réside dans l'interprétation de la probabilité $P(A)$ en termes de fréquence d'apparition de l'événement A sur un grand nombre d'expériences. Cette fréquence est définie comme le rapport N_A/N , où N_A est nombre de fois où A s'est produit lors de N d'expériences. L'hypothèse physique fondamentale est que les conditions de l'expérience sont telles que ce rapport tend vers une limite quand N devient de plus en plus grand, cette limite est la probabilité de A :

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N_A}{N}.$$

Comme Ω est l'ensemble de toutes les éventualités qui peuvent se produire, il est clair que $N_\Omega = N$ et donc l'application P doit vérifier la condition supplémentaire de normalisation : $P(\Omega) = 1$.

Intuitivement, le calcul des probabilités est un calcul de fréquences sur des grands nombres ; dans le formalisme de Kolmogorov, il peut être vu comme un cas particulier d'une théorie générale de la mesure.

Ce qui fait sa différence essentielle avec le calcul des mesures géométriques est la notion d'indépendance.

La définition intuitive de l'indépendance de deux événements A et B est que la réalisation de l'un d'entre eux ne doit apporter aucune information sur la réalisation de l'autre. La probabilité de B , calculée en ayant l'information que A est réalisé, n'est autre que la mesure relative de B par rapport à A ; elle est définie par la probabilité conditionnelle

$$P(B \text{ si } A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

La condition d'indépendance des événements A et B se traduit alors par

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Autrement dit, l'indépendance de deux événements se traduit par le fait que la mesure de l'intersection des deux parties qui les représentent doit être égale au produit des mesures de chaque partie. On voit que l'on a là une condition qui est totalement étrangère aux propriétés habituelles des mesures géométriques. Ces considérations font l'objet du premier chapitre de ce livre.

Le chapitre II donne une présentation succincte de la théorie de la mesure ; il peut être passé ou parcouru rapidement dans une première lecture.

Dans le chapitre III, on aborde la notion centrale du calcul des probabilités, celle de variable aléatoire et de loi de probabilité. Intuitivement, une variable aléatoire réelle est un nombre réel X dont les variations sont soumises au hasard. Dans le formalisme de Kolmogorov l'intervention du hasard se traduit par le choix d'un élément ω de Ω , le nombre X va dépendre de ce choix. On va donc représenter une variable aléatoire X par la donnée pour toute éventualité ω d'un nombre réel $X(\omega)$; autrement dit, X devient une simple fonction

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Le fait de représenter l'objet mouvant qu'est le nombre X dont les valeurs sont aléatoires par une fonction sur Ω semble figer le hasard. Mais celui-ci se retrouve dans la distribution des probabilités des valeurs de X qui est alors définie par la donnée pour tout intervalle I de \mathbb{R} de la probabilité

$$P_X(I) = P(\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \in I\}).$$

Cela définit une mesure de probabilité sur \mathbb{R} ,

$$P_X : I \mapsto P_X(I),$$

que l'on appelle la loi de probabilité de X .

Les lois de probabilités sur \mathbb{R} sont donc des mesures. Intuitivement, une mesure de probabilité sur \mathbb{R} est l'analogie d'une répartition de masse sur une droite. Si celle-ci est concentrée sur un ensemble dénombrable de points, on dit que la mesure est discrète ; elle peut aussi être diluée avec une certaine densité. Ces mesures P_X sur \mathbb{R} peuvent être représentées plus concrètement par leurs fonctions de répartition

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

La fonction F_X est une fonction croissante dont l'allure traduit la répartition des probabilités des valeurs de X . Par exemple, si F_X est une fonction en escalier, les points de discontinuité de F_X correspondent aux valeurs possibles x_i de X et la valeur du saut de F_X en un point x_i est la probabilité que $X = x_i$. Mais la fonction F_X peut aussi être continue sur \mathbb{R} , par exemple si F_X est la primitive d'une fonction continue f ; dans ce cas, la loi de X est diluée sur \mathbb{R} avec la densité f , ce qui se traduit par le fait que la loi de probabilité de X est donnée par

$$P_X([a, b]) = \int_a^b f(x)dx.$$

La représentation des variables aléatoires comme fonctions sur Ω permet d'utiliser un calcul intégral que l'on peut définir plus généralement sur tout ensemble muni d'une mesure.

Nous développerons l'essentiel de cette théorie de l'intégration au chapitre IV. On pourra ainsi définir la moyenne ou espérance, notée $E(X)$, d'une variable aléatoire comme l'intégrale de la fonction X sur Ω :

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega).$$

Cette intégrale est un outil théorique utile dans les démonstrations de théorèmes généraux. On démontrera ainsi très simplement les inégalités classiques concernant la probabilité qu'a une variable de s'écarter suffisamment de sa moyenne. Mais du point de vue pratique, le résultat essentiel est que l'on peut transférer l'intégration sur \mathbb{R} pour obtenir

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x),$$

où l'on intègre par rapport à la mesure P_X ; autrement dit, la connaissance de la loi de X suffit à elle seule au calcul de l'intégrale.

Dans le chapitre V, on examinera les situations où plusieurs variables aléatoires sont liées à une même expérience. La notion fondamentale qui décrira la variation de ces variables est celle de loi conjointe. Dans le cas de deux variables réelles X et Y , la loi conjointe du couple (X, Y) est la mesure de probabilité sur \mathbb{R}^2 , définie par

$$P_{(X,Y)}(I \times J) = P(\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) \in I \text{ et } Y(\omega) \in J\}).$$

On peut déduire de cette mesure les lois de probabilité de X et de Y . L'indépendance des variables X et Y est définie par le fait que la loi conjointe de (X, Y) est la mesure produit des lois de X et de Y , définie par

$$(P_X \otimes P_Y)(I \times J) = P_X(I) \times P_Y(J).$$

Dans ce cas, la loi de la somme $X + Y$ s'obtient simplement à l'aide des lois de X et de Y par une opération que l'on appelle le produit de convolution, et la moyenne du produit XY est donnée par

$$E(XY) = E(X)E(Y),$$

ou encore

$$\int_{\Omega} XY dP = \left(\int_{\Omega} X dP \right) \times \left(\int_{\Omega} Y dP \right),$$

ce qui montre combien l'indépendance des variables X et Y peut modifier les règles du calcul intégral. On généralisera ces notions à des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^n .

La transformation de Fourier est une notion centrale en mathématiques ; dans les Probabilités, elle donne lieu à la notion de fonction caractéristique d'une loi de probabilité P_X . C'est la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}).$$

Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, la fonction caractéristique de la somme $X + Y$ s'obtient simplement comme le produit des fonctions caractéristiques de X et Y :

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

Le point essentiel est que la fonction caractéristique d'une loi suffit pour déterminer cette loi. On peut ainsi déterminer directement la loi de la somme de variables indépendantes. Cette notion, très utile, fera l'objet du chapitre VI.

Les variables aléatoires gaussiennes jouent un grand rôle dans la théorie des probabilités. La plus simple des lois gaussiennes est la loi normale, définie par la densité bien connue

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Les généralisations de cette loi et leurs propriétés seront étudiées au chapitre VII.

Les résultats d'une suite infinie de tirages successifs et indépendants les uns des autres, d'une variable aléatoire X , donnent naissance à une suite infinie de variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, qui sont indépendantes et de même loi que X . On peut comparer les « moyennes empiriques »

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

à la « moyenne théorique » $E(X)$.

Les lois des grands nombres, dont il est question au chapitre IX, sont des résultats de convergence du type

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \rightarrow E(X).$$

Les divers modes de convergence communément utilisés sont introduits dans le chapitre VIII. En particulier, la convergence en loi permet d'énoncer le théorème central limite, qui affirme que l'écart entre \bar{X}_n et $E(X)$, convenablement normalisé, a pour loi limite une loi gaussienne.

Dans le cas particulier où la variable aléatoire X est la variable indicatrice d'un événement A , c'est-à-dire prend la valeur 1 lorsque A est réalisé et 0 sinon, la moyenne empirique \bar{X}_n est la traduction mathématique de la fréquence d'apparition de A lors de n épreuves.

Les lois des grands nombres affirment, dans ce cas, que l'on a

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \rightarrow P(A).$$

Le théorème central limite donne alors une information sur l'écart entre ces fréquences et la probabilité. Cela montre la puissance de la théorie et sa cohérence avec les hypothèses sur lesquelles elle a été fondée.

Le chapitre X donne une petite introduction au très vaste domaine des processus stochastiques. L'exemple le plus élémentaire d'un tel processus est la marche aléatoire consistant à faire un pas vers la droite ou vers la gauche, suivant les résultats d'une suite de tirages successifs de pile ou face. Nous donnerons quelques résultats classiques sur les trajectoires de cette marche. On présentera brièvement une généralisation de ce processus que l'on appelle les martingales à temps discret. On prendra comme exemple de processus à temps continu le processus de Poisson, dont on donnera les diverses représentations classiques. Un processus à temps continu célèbre est le mouvement brownien, dont on donnera une présentation heuristique, due à Paul Levy, sous la forme d'une limite de marche aléatoire de pas infinitésimal dt et d'amplitude \sqrt{dt} .

Ce qui précède montre que le Calcul des Probabilités ne se réduit pas à des problèmes de dénombrement ou de calcul intégral, bien qu'une bonne maîtrise des techniques de l'Analyse soit en général nécessaire. L'expérience de l'enseignement montre que la difficulté principale que rencontre l'étudiant lors de son premier contact avec cette théorie n'est pas seulement technique, c'est celle de se forger une vision claire des notions de probabilité, indépendance, variable aléatoire, lois conjointes, convergences, etc.

Nous avons essayé dans ce livre de donner les résultats de base du Calcul des Probabilités, en insistant sur la compréhension du statut des objets de notre étude. Le Calcul des Probabilités fourmille de paradoxes qui montrent combien il est difficile d'avoir une intuition sûre dans ce domaine. Pour favoriser le développement d'une telle intuition, nous avons illustré les notions introduites par de nombreux exemples et exercices. Ceux-ci n'ont aucune prétention à l'originalité et la plupart se retrouvent dans les très bons ouvrages cités en bibliographie.

Quelques développements plus techniques sont souvent placés en fin de chaque chapitre et peuvent être passés en première lecture, certains points plus difficiles sont simplement évoqués ; le lecteur en trouvera le développement dans la vaste littérature des Probabilités, par exemple dans le livre-référence de William Feller.

Le présent ouvrage est issu des cours de Probabilités donnés en Licence de Mathématiques entre les années 1995 et 2010.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude à Michel Miniconi, pour l'aide qu'il m'a apportée en me faisant bénéficier, lors de nos enseignements, de ses vastes connaissances dans le domaine des Probabilités. Combien de problèmes en apparence compliqués se sont éclaircis lors de nos agréables discussions. Sa vision des Mathématiques, très humaine et loin de tout dogmatisme, a été pour moi une source de réconfort. Lorsqu'il était directeur du département de Mathématiques, son soutien constant aux « proba » a permis l'éclosion à l'Université de Nice de nouveaux enseignements des probabilités.

Mes vifs remerciements vont aussi à Claude Lobry, avec qui j'ai eu le plaisir de travailler. Dans nos enseignements des probabilités, sa recherche de la présentation simple des idées de base et de démonstrations « en deux lignes », évitant tout formalisme inutile, a été pour moi très instructive.

Merci à tous les autres collègues avec qui j'ai enseigné les Probabilités, et en particulier à Frédéric Testard¹, Jean-François Burnol, Jean-Philippe Labrousse et Yannick Baraud.

Merci à mes collègues physiciens Thierry Grandou et Jacques Rubin pour les passionnantes discussions sur la physique quantique et les Inégalités de Bell.

Merci à Jean-Paul Pradère pour sa disponibilité et sa gentillesse.

Je voudrais aussi exprimer toute ma reconnaissance aux Éditions Calvage et Mounet pour le soin apporté à l'achèvement de ce livre, et en particulier à Fulbert Mignot et Bernard Randé pour leurs remarques pertinentes. Un mot enfin à l'adresse d'Alberto Arabia et de Rached Mneimné, qui m'ont prodigué avec beaucoup de gentillesse leurs conseils et encouragements.

Ce second tirage a été l'occasion de corriger un certain nombre de coquilles et d'inclure un chapitre sur le formalisme probabiliste de la Mécanique quantique et des compléments sur les intégrales stochastiques. Une amélioration sensible a été apportée par ailleurs à la mise en page.

Septembre 2019

1. Une pensée émue pour mon ami Frédéric Testard, disparu bien trop tôt en l'automne 2018. J'ai eu la chance d'enseigner avec Frédéric durant plusieurs années. Avec lui, un problème à l'abord difficile devenait une expérience joyeuse pour l'esprit. Sa puissance de travail et son engagement passionné pour l'enseignement n'ont cessé de susciter mon admiration.

Table des matières

I. Probabilités et indépendance

1. Introduction	1
2. Ensemble des éventualités	2
2.1. Préliminaires	2
2.2. Relation entre le langage ordinaire et le langage ensembliste	4
2.3. Probabilité d'un événement	5
3. Trois types d'espaces probabilisés	6
3.1. Espace probabilisé fini	6
3.2. Espace probabilisé dénombrable	8
3.3. Espace probabilisé non dénombrable	9
4. Propriétés élémentaires	10
4.1. Passage au complémentaire	10
4.2. Réunion croissante et intersection décroissante	11
4.3. Inégalité de Boole	12
4.4. Formule de Poincaré	13
5. Probabilités conditionnelles	15
5.1. Un petit paradoxe	15
5.2. Définition	15
5.3. Formule des probabilités totales	18
5.4. Formule de Bayes	20
6. Indépendance	21
7. Quelques problèmes classiques	24
7.1. Trois cartes, une rouge et deux noires	24
7.2. Trois bancs à deux places	27
7.3. Partage avant la fin de la partie	28
7.4. L'aiguille de Buffon	30

8. Suites d'événements indépendants	32
8.1. Réunion d'événements indépendants	32
8.1.1. Cas d'une réunion finie	32
8.1.2. Cas d'une réunion infinie	32
8.1.3. Lemme de la série divergente	33
8.2. Lemme de Borel-Cantelli	34
9. Exercices	36

II. Mesures

1. Introduction	39
2. Algèbres de parties et tribus	40
2.1. Définitions	40
2.2. Tribu engendrée	42
3. Mesures	44
3.1. Définition d'une mesure	44
3.2. Opérations sur les mesures	47
3.3. Mesures discrètes	48
4. Construction de mesures	48
5. Mesure de Lebesgue	49
5.1. Mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}	49
5.2. Propriétés	50
5.3. Mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n	50
6. Mesures et fonctions de répartition sur \mathbb{R}	51
6.1. Fonction de répartition d'une mesure finie	51
6.2. Mesure de Stieltjes	52
6.3. Correspondance	54
6.4. Mesures discrètes et diffuses sur \mathbb{R}	54
6.5. Décomposition d'une mesure finie sur \mathbb{R}	56
7. Le jeu de pile ou face	57
7.1. Mesure de probabilité sur un espace de suites	57
7.2. Le jeu de pile ou face	59
7.3. Développement dyadique	59
8. Exercices	61
9. Appendice	65
9.1. Définition d'une mesure par prolongement	65
9.2. Unicité du prolongement	65

III. Variables aléatoires réelles

1. Introduction	69
2. Loi d'une variable aléatoire	70
3. Fonction de répartition d'une VA	73
4. Principales lois de probabilité	78
5. Loi conditionnelle	85
6. Simulation d'une VA de loi donnée	86
6.1. Fonction d'une variable aléatoire	86
6.2. Exemple de simulation d'une variable aléatoire X	88
6.3. Inverse de Lévy d'une fonction de répartition	88
6.4. La simulation par inverse de Lévy	91
7. Image d'une densité de probabilité	91
8. Exercices	93

IV. Intégrale et moments

1. Introduction	97
2. L'intégrale des fonctions mesurables	98
3. Moments d'une variable aléatoire réelle	103
3.1. Valeur moyenne ou espérance	103
3.2. Variance	108
4. Espérance conditionnelle par rapport à un événement	110
5. Inégalités classiques	112
5.1. Inégalités de Markov, Tchebychev et autres	112
5.2. Inégalité de Jensen	114
5.3. Inégalité de Cramér-Rao	115
6. Formule de Taylor généralisée	116
7. Exercices	121
8. Appendice	125
8.1. Fonctions mesurables	125
8.2. L'intégrale des fonctions mesurables	126
8.3. Interversions des signes \lim , \sum et \int	129
8.4. Intégrales dépendant d'un paramètre	130
8.5. Espaces $L^1(E)$ et $L^2(E)$	131
8.5.1. L'espace $L^1(E)$	131
8.5.2. L'espace $L^2(E)$	132
8.6. Intégrale par rapport à une mesure discrète	134
8.7. Mesures à densité	136
8.8. Théorème de transfert	137
8.9. Changement de variable dans \mathbb{R}^n	139

V. Variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^n

1. Introduction	143
2. Couple de deux variables aléatoires réelles	146
2.1. Loi conjointe	146
2.1.1. Le cas discret	147
2.1.2. Le cas à densité	149
2.1.3. La fonction de répartition	153
2.2. Indépendance de deux VA réelles	156
2.2.1. Indépendance dans le cas discret	157
2.2.2. Indépendance dans le cas à densité	161
2.2.3. Indépendance et fonction de répartition	164
2.2.4. Simulation d'un couple de variables indépendantes de lois données	165
2.2.5. Mesure produit	165
2.3. Somme et Convolution	168
2.3.1. Loi de la somme de deux VA	168
2.3.2. Convolution de deux lois de probabilité	169
2.3.3. Symétrisation d'une loi de probabilité	176
2.4. Covariance et corrélation	178
2.4.1. Moyenne et matrice de covariance	178
2.4.2. Corrélation	180
2.5. Espérance conditionnelle	184
2.5.1. Régression « linéaire »	185
2.5.2. L'espérance conditionnelle comme projection	186
2.5.3. Propriétés de l'espérance conditionnelle	189
2.5.4. L'espérance $E(Y X)$ lorsque X est discrète	190
2.5.5. L'espérance $E(Y X)$ lorsque (X, Y) possède une densité	192
2.6. Loi conditionnelle	193
2.6.1. Cas où X est discrète	198
2.6.2. Cas où le couple (X, Y) possède une densité	199
3. Généralisation à la dimension n	201
3.1. Loi conjointe	201
3.2. Moyenne et variance	202
3.3. Indépendance	204
3.4. Régression linéaire	212
3.5. Espérance conditionnelle	213
3.6. Tribu engendrée par une VA	214
4. Exercices	215
5. Appendice	217
5.1. Produit de deux mesures de probabilité	217
5.2. Mesure produit de deux mesures sur \mathbb{R}	219
5.3. Convolution et régularisation	221
5.4. Mesure produit sur l'espace des suites	223

VI. Fonctions caractéristiques	
1. Introduction	225
2. La fonction caractéristique	226
2.1. Définitions et propriétés	226
2.2. Fonction caractéristique d'une VA à valeurs dans un réseau	229
2.2.1. Cas où X est à valeurs dans $\alpha\mathbb{Z}$	229
2.2.2. Cas général	230
2.3. Fonction caractéristique d'une VA à densité	231
2.4. La fonction $\ln(\varphi_X)$ et les cumulants	232
3. Fonction génératrice d'une VA à valeurs dans \mathbb{N}	233
4. De la fonction caractéristique à la loi	237
4.1. Théorème d'inversion	237
4.2. Formules d'inversion	240
5. Généralisation à \mathbb{R}^n	244
5.1. Définitions et propriétés	244
5.2. Inversion	245
5.3. Fonction caractéristique et indépendance	246
5.4. Formule d'inversion	249
6. Exercices	250
VII. Variables gaussiennes	
1. Introduction	253
2. Définitions et propriétés	253
3. Variables gaussiennes et indépendance	256
4. Réduction d'une variable gaussienne	259
5. Échantillons gaussiens	261
5.1. Moyenne et variance empiriques	262
5.2. Estimation de la moyenne d'une loi gaussienne de variance donnée	263
5.3. Estimation de la moyenne d'une loi gaussienne de variance inconnue	265
6. Exercices	269
VIII. Suites de variables aléatoires	
1. Introduction	273
2. Convergence presque sûre	274
3. Convergence en probabilité	276
4. Convergence en loi	278
4.1. Définition et premières propriétés	278
4.2. Convergence des fonctions de répartition	282
4.3. Cas discret et à densité	285
4.4. Convergence des fonctions caractéristiques	288
4.5. Généralisation à \mathbb{R}^m	292

5. Suites de VA indépendantes	293
5.1. Définition et existence	293
5.2. Simulation par la méthode du rejet	296
5.3. Propriétés asymptotiques	298
6. Exercices	300
7. Appendice. Démonstration du théorème de Lévy	302

IX. Lois des grands nombres

1. Introduction	305
2. Loi faible des grands nombres	305
2.1. Loi faible des grands nombres dans $L^2(\Omega)$	306
2.2. Loi faible dans $L^1(\Omega)$	308
3. Loi forte des grands nombres	310
4. Théorème central-limite	321
4.1. Théorème central-limite dans \mathbb{R}	321
4.2. Formule de Stirling généralisée	324
4.3. Estimation d'une probabilité	325
4.4. Une extension du théorème central limite	329
4.5. Convergence vers la loi de Poisson	332
4.6. Théorème central-limite dans \mathbb{R}^m	334
4.7. Le test du χ^2	335
4.8. Développements d'Edgeworth	337
4.8.1. Le théorème central-limite pour les densités	337
4.8.2. Développement de Tchebychev-Hermite d'une densité	340
4.8.3. Développement d'Edgeworth d'une densité	341
5. Exercices	343

X. Introduction aux processus stochastiques

1. Introduction	347
2. Définitions	347
3. Marche aléatoire symétrique	349
3.1. Introduction	349
3.2. Passages par 0	351
3.3. Temps de passage	355
3.4. Grandes déviations	356
4. Martingales discrètes	360
4.1. Jeu à mise variable	360
4.2. Martingales	362
4.3. Temps d'arrêt	363
5. Introduction heuristique au mouvement brownien	365
5.1. Définition	365
5.2. Mesure de Wiener	369

6. Processus de Poisson	376
6.1. Définitions	376
6.2. Lien avec la loi exponentielle	378
6.3. Autre caractérisation d'un processus de Poisson	379
7. Exercices	380
XI. Lois conjointes et formalisme quantique	
1. Introduction	387
2. Lois conjointes	387
2.1. Variable aléatoire	387
2.2. Retour sur la loi conjointe de deux VA	388
2.3. Loi conjointe de trois VA	393
2.4. Inégalité de Bell-CHSH	397
3. Le formalisme probabiliste de la Mécanique quantique	399
3.1. Petite introduction historique	399
3.2. Axiomes généraux	401
3.3. Loi conjointe et relation de commutation	411
3.3.1. Termes d'interférence	416
3.4. Dispersion et relation d'incertitude	417
3.5. Un système composé de deux sous-systèmes	420
3.5.1. Généralités sur le produit tensoriel	420
3.5.2. Un système composé de deux particules de spin $1/2$	422
3.5.3. Observables d'un type particulier	423
3.6. Système dans un état intriqué	425
3.6.1. Violation des inégalités de Bell	430
3.6.2. Un système de trois particules et l'expérience GHZ	436
3.6.3. Conclusion	439
Solutions des exercices	
1. Solutions des exercices du chapitre 1	441
2. Solutions des exercices du chapitre 2	447
3. Solutions des exercices du chapitre 3	453
4. Solutions des exercices du chapitre 4	458
5. Solutions des exercices du chapitre 5	465
6. Solutions des exercices du chapitre 6	471
7. Solutions des exercices du chapitre 7	475
8. Solutions des exercices du chapitre 8	482
9. Solutions des exercices du chapitre 9	486
10. Solutions des exercices du chapitre 10	493

Petit appendice mathématique

1. Notions ensemblistes	507
1.1. Parties d'un ensemble E	507
1.2. Produit d'ensembles	507
1.3. Applications de E dans F	508
1.4. Ensembles dénombrables	508
2. Dénombrement	510
2.1. Fonctions indicatrices	510
2.2. Formule du crible (ou principe d'inclusion-exclusion) . . .	510
2.3. Combinatoire	510
3. Suites et séries	513
3.1. Suites	513
3.2. Séries	514
3.3. Lemme de Toeplitz	516
3.4. Théorème de Tannery	518
3.5. Séries doubles	519
4. Fonctions d'une variable réelle	520
4.1. Usage des équivalents	520
4.2. Intégrale des fonctions continues	522
4.3. Suites et séries de fonctions	523
4.4. Séries entières	524
4.5. La fonction exponentielle et le Log	527
4.6. Les fonctions Gamma et Beta d'Euler	528
5. Algèbre linéaire dans \mathbb{R}^n	530
5.1. Orthogonalité et transposition	531
5.2. Diagonalisation	532
6. Opérateurs hermitiens dans \mathbb{C}^n	533
6.1. Produit scalaire hermitien sur \mathbb{C}^n	533
6.2. Adjoint d'un opérateur	534
6.3. Les projecteurs	536
6.4. Diagonalisation d'un opérateur hermitien	537
7. Espaces normés	540
7.1. Norme et convergence	540
7.2. Espace de Hilbert	541
8. Calcul différentiel dans \mathbb{R}^n	542
8.1. Topologie de \mathbb{R}^n	542
8.2. Différentielle et jacobienne	542

Bibliographie **547**

Index **549**