

*Im-et-Ker*

101. — Les clefs pour l'X. Bernard Randé & Franck Taïeb
102. — Les clefs pour l'X (2). Roger Mansuy & Bernard Randé
103. — Les clefs pour les Mines. Françoise Fontanez & Bernard Randé
104. — Problèmes clefs pour mathématiques supérieures. Hervé Gianella, Romain Krust, Franck Taïeb & Nicolas Tosel
105. — Les clefs pour la PSI et la PSI\*. Roger Mansuy & Bernard Randé
106. — Une année de colles en Math Sup MPSI. Éric Kouris
107. — Les clefs pour les Hautes Études Commerciales. Philippe Gallic & Jean-Louis Grappin
108. — Le jardin d'Eiden. Une année de colles en MP\*. Jean-Denis Eiden
109. — Un Max de Maths. Maxime Zavidovique
110. — Mathématiques pour la voie économique et commerciale. J. Gärtner
111. — Probabilités. Cours et exercices corrigés (1). Thierry Meyre
112. — Les clefs pour l'écrit MP de mathématiques (session 2015). Bernard Randé, Alix Deleporte-Dumont, Quentin Guignard
113. — Les clefs pour l'oral MP de mathématiques, X-ENS (session 2015). Quentin Guignard, Bernard Randé
114. — Les clefs pour l'écrit de mathématiques des concours 2016, filière MP. Clément de Seguins Pazzis
115. — Les clefs pour l'Info. I. Belghiti, R. Mansuy et J.-J. Vie.
116. — Les nouvelles clefs pour les Mines-CCP (tome I). Oral MP, 2015-16. Bernard Randé
- 117.** — Agrégation interne. Algèbre générale, algèbre linéaire et un peu de géométrie. Georges Skandalis
118. — Florilège d'exercices de l'oral d'HEC. Jean-Louis Roque
119. — Les clefs pour l'écrit MP 2017. Clément de Seguins Pazzis
120. — Les clefs pour l'écrit de mathématiques et d'informatique. Filière PSI 2015-2016. L. Cozar, N. Jousse, B. Randé, L. Sartre
121. — Agrégation interne. Analyse. Georges Skandalis
122. — Les clefs pour l'oral MP. Mathématiques ENS-X, 2016-2017. Thomas Blomme, Louise Gassot, Quentin Guignard, Bernard Randé
123. — Une année de colles en MPSI (Nouvelle édition). Éric Kouris
124. — Probabilités. Cours et exercices corrigés (2). Thierry Meyre
125. — Carnet de voyage en Algérie. Philippe Caldero et Marie Peronnier

Georges Skandalis

**Agrégation interne**  
Algèbre générale, algèbre linéaire  
et un peu de géométrie



Calvage & Mounet



GEORGES SKANDALIS est professeur à l'université Paris Diderot et a été responsable de la préparation à l'agrégation interne pendant dix ans. Il est ancien élève de l'ÉNS et membre de l'Institut de mathématiques de Jussieu-Paris, rive gauche, dans l'équipe « Algèbres d'opérateurs ».

georges.skandalis@imj-prg.fr

⊗ Imprimé sur papier permanent

ISBN 978-2-916352-35-0



© Calvage & Mounet, Paris, 2017  
Second tirage, corrigé et augmenté, 2019

*À cri douce et au jazz*



## Avant-Propos

Ce livre s'est construit au cours d'une dizaine années d'enseignement dans le cadre de la préparation à l'agrégation interne de mathématiques de l'université Paris Diderot — après plusieurs années passées dans le jury de ce concours, ainsi qu'à celui de l'agrégation externe.

Ce volume fait partie d'un diptyque. Les thèmes abordés ici couvrent une bonne partie du programme d'algèbre et de géométrie du concours : ce sont essentiellement ceux que j'ai enseignés au cours des années — avec relativement peu de géométrie. On y traite des notions d'algèbre fondamentale, les polynômes compris. Dans une deuxième partie, on s'étend sur l'algèbre linéaire et quadratique, avec une incursion relativement courte ou timide en géométrie affine et euclidienne. L'autre volume est consacré à l'analyse.

Je me suis efforcé à donner un point de vue très classique, en suivant de relativement près le programme officiel. Je ne me suis permis que deux ou trois excursions un peu loin du programme de l'agrégation interne, en particulier un développement rapide sur le théorème de séparation de Hahn-Banach (chapitre X)... Pour le reste, je suis resté dans les limites du programme actuel de l'agrégation interne.

Pour garder au livre une taille raisonnable, beaucoup de démonstrations sont omises. J'ai laissé de côté certaines qui me semblaient plus faciles — ou plus faciles à trouver dans d'autres ouvrages, en particulier ceux en direction de la licence ou des CPGE. Dans les parties les plus élémentaires, on se contente d'énoncer des résultats de base — juste un plan relativement sommaire. Dans certains autres cas, j'ai choisi de donner des démonstrations rapides, en n'insistant que sur les arguments les plus cruciaux.

Certaines démonstrations, comme certaines parties, sont plus détaillées. Cela provient certainement d'un choix personnel. Cependant, le plus souvent, cela provient d'une demande des auditeurs de nos cours.

Le livre contient de nombreux exercices avec des solutions, quelquefois succinctes, mais complètes. Les exercices proposés sont pour la plupart classiques, même si certaines solutions m'ont semblé plus directes ou plus éclairantes que des solutions que l'on trouve ailleurs. Si quelques exercices du livre sont des exercices d'entraînement, la plupart sont assez consistants pour pouvoir être proposés comme « développement » dans une épreuve d'exposé et surtout pour l'épreuve d'exercices. Plusieurs d'entre eux sont beaucoup trop longs pour être proposés en entier à un oral du concours. Les dernières questions servent dans ce cas à approfondir l'exercice.

La difficulté des exercices se veut relativement variée pour permettre à chacun de choisir le niveau où il souhaite se placer. J'ai signalé quelques-uns des exercices les plus difficiles par un symbole (\*).

Ce que l'on demande aux agrégatifs est de faire des liens entre des nombreuses notions de mathématiques du programme. Ce livre n'est donc pas conçu pour être lu de façon linéaire. Il est plutôt destiné à servir durant les trois heures que dure la préparation d'un sujet d'oral que l'on vient de tirer au hasard le jour du concours. De ce fait, plusieurs exercices, et aussi des démonstrations, voire des énoncés du cours, font appel à des notions introduites plus loin dans le texte. On n'a pas non plus craint les répétitions des hypothèses.

Le lecteur sera peut-être un peu déçu de ne pas trouver de bibliographie en fin de volume. Mon principal conseil à nos agrégatifs a toujours été de se tourner, chacun, vers les livres fréquentés pendant les années d'études.

## Remerciements

Je remercie toute l'équipe d'enseignants qui, au fil des ans, a partagé avec moi les cours de la préparation : Daniel Bennequin, Gentiana Danila, Romain Dujardin, Catherine Gille, David Hermann, Thierry Meyre et Rached Mneimné. J'ai utilisé plusieurs exercices qu'ils ont proposés. Une mention spéciale pour Gentiana et Catherine, qui ont suivi le « poly d'algèbre » et m'ont fait corriger une multitude de coquilles et autres erreurs. Il ne faut pas non plus oublier Frédéric Han et Pascal Molin qui ont organisé des séances de TP machine pour nos stagiaires, et les nombreux collègues qui nous ont donné un coup de main pour les oraux blancs, et en particulier Julie Deserti, avec qui j'ai assuré plusieurs oraux blancs...

Je remercie Jean-François Mestre, qui m'a soufflé, presque à son insu, de nombreux exercices.

Je ne pourrai citer ici tous les stagiaires de notre formation depuis dix ans. Presque tous ont contribué, par leurs questions, leurs remarques et conseils, à améliorer, directement ou indirectement, le manuscrit. En premier lieu, je tiens à remercier Muriel Leduc. Cet ouvrage est parti d'un projet de livre en commun avec elle. Parmi ceux qui m'ont le plus aidé et encouragé en relevant soigneusement ligne après lignes les petites ou grandes erreurs qui s'étaient glissées ou en m'incitant à ajouter des explications supplémentaires, citons Anne-Laure Artigalas, Julien Baldacci, Boris Bertin, Nicolas Biehler, Charlotte Boudier, Jessica Brisac, Florence Caruana, Stéphanie Colin, Pascale Creuse, Cécile Damongeot, Jennifer Dapilly, Nicolas Deboaine, Angélique Di Benedetto, Anne Durandet, Catherine Durieu, Cindy Gazda, Anaïs Goëau, Raymonde Gtari-Hounnou, Mehdi Hanebali, Marie Joubert, Harun Karagoz, Julien Nicolas, Marie Meunier, Clotilde Peugeot, Éléonore Petit, Éric Pons, Nicolas Poulain, Barbara Pradel, Philippe Raynaud, Stéphanie Rondeau, Fabien Sommier, Guenièvre Tandonnet, Élisabeth Thoyon... et j'en oublie...

Un grand merci à Alain Debreil pour son aide précieuse.





# Table des matières

<b>Première partie.– Algèbre générale</b>	<b>3</b>
<b>I. Nombres entiers naturels</b>	
1. Quelques rappels sur $\mathbb{N}$ . . . . .	3
2. Quelques exemples de dénombrement . . . . .	4
3. Rappel sur les groupes et leurs opérations . . . . .	7
Exercices du chapitre I . . . . .	12
<b>II. Arithmétique dans <math>\mathbb{Z}</math></b>	
1. Division dans $\mathbb{Z}$ . . . . .	27
2. Sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$ . . . . .	28
3. PGCD, PPCM et algorithme d’Euclide . . . . .	28
4. Nombres premiers entre eux . . . . .	30
5. Décomposition en nombres premiers . . . . .	31
6. Congruences, l’anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . . . . .	31
7. Application : groupes cycliques . . . . .	35
Exercices du chapitre II . . . . .	37
<b>III. Anneaux</b>	
1. Généralités . . . . .	73
2. Anneaux intègres ; anneaux principaux . . . . .	74
3. Anneaux euclidiens . . . . .	78
4. Un exemple . . . . .	79
5. Corps commutatifs . . . . .	82
Exercices du chapitre III . . . . .	84
<b>IV. Polynômes et fractions rationnelles</b>	
1. Polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif $K$ . . . . .	97
2. Fonctions polynômes . . . . .	98
3. Fractions rationnelles . . . . .	106
Exercices du chapitre IV . . . . .	108

## Deuxième partie.– Algèbre linéaire 139

### V. Espaces vectoriels, dimension

1. Espaces vectoriels . . . . .	139
2. Sous-espaces vectoriels . . . . .	140
3. Applications linéaires . . . . .	142
4. Espaces vectoriels quotient . . . . .	143
5. Ensembles d'applications linéaires . . . . .	145
6. Familles libres, génératrices, bases . . . . .	146
7. Matrices . . . . .	147
8. Espaces vectoriels de dimension finie . . . . .	148
9. Dimension d'un espace vectoriel . . . . .	149
10. Rang . . . . .	151
Exercices du chapitre V . . . . .	152

### VI. Matrices et bases

1. Matrice d'une application linéaire . . . . .	171
2. Matrices équivalentes, matrices semblables . . . . .	172
3. Dualité, base duale . . . . .	175
Exercices du chapitre VI . . . . .	181

### VII. Systèmes, déterminants

1. Systèmes d'équations linéaires . . . . .	191
2. Déterminants . . . . .	194
3. Opérations élémentaires sur les matrices . . . . .	201
Exercices du chapitre VII . . . . .	207

### VIII. Réduction des endomorphismes

1. Vecteurs propres et valeurs propres . . . . .	223
2. Polynômes d'endomorphismes . . . . .	228
3. Applications . . . . .	233
Exercices du chapitre VIII . . . . .	238

### IX. Formes quadratiques

1. Formes bilinéaires, formes quadratiques . . . . .	277
2. Formes quadratiques sur un espace euclidien . . . . .	286
3. Endomorphismes symétriques et orthogonaux . . . . .	292
Exercices du chapitre IX . . . . .	300

<b>X. Géométrie affine en dimension finie</b>	
1. Espaces affines, sous-espaces affines . . . . .	323
2. Applications affines . . . . .	324
3. Barycentres . . . . .	325
4. Repères . . . . .	327
5. Convexité . . . . .	328
6. Espaces affines euclidiens . . . . .	330
7. Homographies . . . . .	336
8. Appendice.– Théorèmes de Hahn-Banach . . . . .	340
Exercices du chapitre X . . . . .	343
<b>Index</b>	<b>363</b>