UFHB

Niveau: L3 ACTUARIAT

Année Académique 2018/2019

Devoir de Probabilités

2h 00

**La clarté de la rédaction est exigée**

**Exercice 1** ( 10 points)

Le couple de variables aléatoires $(X, Y)$ a pour densité jointe $f$ définie par:

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}1_{\Delta}(x,y) \text{ avec } \Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

1) Calculer $\mathbb{P}(X \geq 1/\sqrt{2})$ et $\mathbb{P}(Y \geq 1/\sqrt{2})$, puis

$$\mathbb{P}(X \geq 1/\sqrt{2} \text{ et } Y \geq 1/\sqrt{2});$$

$X$ et $Y$ sont-elles indépendantes?

2) Calculer $\mathbb{P}(X \geq Y)$ et plus généralement $\mathbb{P}(X \geq \lambda Y)$.

3) Calculer la loi de $X$ et celle de $Y$. Calculer la loi du couple $(R, \Theta)$, coordonnées polaires de $(X, Y)$. En déduire la loi de $R$ et celle de $\Theta$. Sont-elles indépendantes?

4) Pour $(\varepsilon, \varepsilon') \in \{-1, 1\}^2$, montrer que $(X, Y)$ a même loi que $(\varepsilon X, \varepsilon' Y)$. En déduire $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$ sans calcul intégrale. Calculer $Cov(X, Y)$.

5) Montrer que $(X, Y)$ a même loi que $(Y, X)$. En déduire $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(R^2)$.

**Exercice 2** (10 points)

Pour une famille $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite de variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètre respectifs $\lambda_i$, on pose $Y = \inf_{1 \leq j \leq n}(X_j)$, et on note $J$ la variable aléatoire telle que $X_J = Y$.

1) Montrer que $Y$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ (avec la convention qu'une variable aléatoire $Y$ suit la loi exponentielle de paramètre $+\infty$ si $\mathbb{P}(Y = 0) = 1$.

2) Montrer que si $\lambda < +\infty$, $J$ est bien défini, indépendant de $Y$ et pour tout $i$

$$\mathbb{P}(J = i) = \frac{\lambda_i}{\lambda}.$$

Pour cela, poser $Y_i = \inf_{j \neq i}(X_j)$, et considérer l'événement $\{X_i < Y_i \leq x\}, x > 0$.