I Programme officiel d'analyse de 1982, appliqué en 1983 en terminale.

CLASSES TERMINALES C ET E

PROGRAMME

Le programme est commun aux classes Terminales C et E.

L'horaire hebdomadaire est de 9 heures (8 + 1).

Comme dans les classes précédentes, de nombreuses activités sont indispensables ; c'est uniquement pour éviter des difficultés d'interprétation au baccalauréat que le choix des thèmes est laissé à l'entière initiative des professeurs : aucune liste indicative n'est proposée.

On continuera à utiliser largement les calculatrices.

L'élève a acquis en Première scientifique un bagage important, qu'on aura soin d'investir dès le début de l'année dans des directions variées. Le professeur de Terminale dispose de l'ensemble des connaissances de Première, démontrées ou admises.

Dans le texte du programme la mention « énoncé admis » ou « on admettra » désigne une proposition pour laquelle le professeur décidera de l'opportunité d'une démonstration, étant entendu que celle-ci n'est pas exigible au baccalauréat mais qu'en tout état de cause la signification de l'énoncé, sa portée, ses applications seront mises en évidence.

Les autres propositions seront, bien entendu, démontrées.

Les élèves ont été, en Première, initiés à des structures. L'étude de celles-ci n'a pas à être développée pour elle-même ; il s'agit cependant de pouvoir disposer, dans l'étude par exemple des nombres complexes ou de la fonction exponentielle, du langage approprié. Le professeur donnera donc au moment convenable la définition d'un corps commutatif, sans en apporter d'autre exemple que $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$, ainsi que les définitions d'un groupe, d'un sous-groupe, d'un morphisme de groupes.

I. SUITES NUMERIQUES

a) Propriété fondamentale (qu'il est hors de question de démontrer) : toute suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorés) est convergente.

Compléments sur les suites convergentes : la composée d'une suite de limite l par une fonction f continue au point l admet $f(l)$ pour limite.

b) Suite divergeant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) ; stabilité du comportement d'une telle suite par addition d'une suite bornée, et par multiplication par une suite admettant un minorant strictement positif (énoncés admis).

Etude des suites $n \longmapsto a^n$ et $n \longmapsto n^\alpha$. Croissance comparée.

c) Suites récurrentes :

Exemples d'études de suites vérifiant une relation $u_{n+1} = f(u_n)$;

Exemples de recherche de suites vérifiant une relation :

$$u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$$

dans laquelle a, b sont des réels donnés, ou une relation :

$$u_{n+1} - u_n = \mathrm{P}(n)$$

dans laquelle P est un polynôme. On prendra certains de ces exemples dans des situations évolutives en économie ou en biologie.

II. FONCTIONS NUMERIQUES

Dans les énoncés et les démonstrations on continuera de se placer dans des hypothèses de bonne sécurité sans en rechercher de plus fines. Comme dans les classes précédentes les exemples d'études de fonctions seront nombreux et variés, et on entretiendra l'habitude de la représentation graphique, car celle-ci joue un rôle important dans la description du comportement ; une indication d'allure peut suffire pour exprimer un aspect qualitatif, un tracé soigné est nécessaire lorsqu'on passe aux aspects quantitatifs.

a) Fonction logarithme népérien $x \longmapsto \ln x$; elle sera présentée le plus tôt possible, en exploitant l'acquis de Première. La fonction logarithme décimal $x \longmapsto \log x$ sera introduite en vue du calcul numérique.,

b) Compléments sur la continuité et les limites. Composée d'une fonction de limite l par une fonction continue au point l.

Si une fonction est croissante sur un intervalle $]a, b[$ $(a<b)$ et si elle est majorée, alors elle admet une limite au point b (énoncé admis).

Fonction tendant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) ; stabilité du comportement d'une telle fonction par addition d'une fonction bornée, et par multiplication par une fonction admettant un minorant strictement positif (énoncés admis).

c) Propriétés des fonctions continues sur un intervalle (fermé ou non, borné ou non) : on donnera les trois propriétés fondamentales suivantes, qu'il est hors de question de démontrer :

L'image continue d'un intervalle est un intervalle ;

L'image continue d'un segment est un segment ;

Une application continue et strictement monotone d'un intervalle sur un autre admet une application réciproque, qui est continue et strictement monotone.

d) Compléments sur le calcul des dérivées : dérivée d'une application composée, d'une application réciproque ; cas de $x \longmapsto \sqrt{x}$.

Dérivées successives. On donnera les notations $\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \ldots$ des dérivées, mais la notion de différentielle est en dehors du programme.

En vue des utilisations en sciences physiques ; définition et notation des applications dérivées partielles d'une application numérique de deux ou trois variables réelles.

En se référant aux propriétés, vues en Première, liant le signe de la dérivée et le sens de variation, on développera sur de nombreux exemples l'étude d'une fonction : sens de variation, signe, extremums, et ses applications à la résolution d'équations et d'inéquations.

Exemples de comportement asymptotique d'une fonction, aspect graphique (courbes « asymptotes », $y = f(x)$ et $y = g(x)$, la différence $f(x) - g(x)$ tendant vers 0 quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$).

e) Fonction exponentielle $x \longmapsto \exp x$ (il est souhaitable d'aborder cette fonction dès la présentation des applications réciproques).

Notations e^x, u^v.

Fonctions $x \longmapsto a^x$ et $x \longmapsto x^\alpha$.

Croissance comparée des fonctions $x \longmapsto \ln x$, $x \longmapsto x^\alpha$, $x \longmapsto \exp x$.

On s'attachera à obtenir, pour $\alpha > 0$, les résultats suivants :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \to 0} x^\alpha . \ln x = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{\exp x} = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha . \exp x = 0.$$

Exemples de dérivées de fonctions composées des types $\ln f$, $\exp f$, f^α. (Les élèves devront savoir reconnaître sur des exemples simples, dans la recherche des primitives, les dérivées de telles fonctions.)

f) Exemples de développements limités au voisinage de 0 : on se bornera à donner la définition d'un développement limité, on établira, jusqu'à leur troisième terme non nul, les développements limités de :

$x \longmapsto \cos x, \quad x \longmapsto \sin x, \quad x \longmapsto \exp x, \quad x \longmapsto \ln(1+x). \quad x \longmapsto \sqrt{1+x}.$

Utilisation de développements limités dans la recherche de limites. (Au baccalauréat on indiquera la marche à suivre dans le cas de fonctions ne se ramenant pas directement à celles qui sont citées ci-dessus.)

Sont hors du programme : les notations de Landau, la notion d'équivalent (pour les suites comme pour les fonctions) ainsi que toute étude systématique des opérations sur les développements limités.

g) Accroissements finis :

Enoncé sans démonstration du théorème de Rolle ; interprétation géométrique.

Pour une fonction f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$:

Si la fonction dérivée f' a ses valeurs comprises entre des réels m et M, alors on a

$$m \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M ;$$

Si la fonction dérivée f' admet au point a une limite l, alors on a également

$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$. Extension à une limite infinie.

IV. CALCUL INTEGRAL

a) Intégrale d'une fonction continue :

Il est recommandé d'adopter la définition suivante :

Soit f une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On a admis, en Première, que f possède des primitives sur I, et que deux quelconques d'entre elles diffèrent par une constante.

Il en résulte que, pour tout $(a, b) \in I^2$, le réel $F(b) - F(a)$ est indépendant du choix de la primitive F ; on le note $\int_a^b f(t)\,dt$ et on l'appelle intégrale, de a à b, de la fonction continue f.

En d'autres termes, $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est donc l'unique primitive de f sur I qui prend la valeur 0 au point a.

On traitera les questions suivantes :

Relation de Chasles (additivité par rapport aux intervalles) ;

Linéarité par rapport aux fonctions ;

Positivité : si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$;

Inégalité de la moyenne, valeur moyenne ;

Changements de variable affines ;

Intégration par parties.

Exemples d'étude d'une fonction de la forme $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$, où f n'a pas de primitive explicitée.

b) Obtention d'une valeur approchée d'une intégrale : on exposera seulement la méthode des rectangles, avec majoration du reste ; on en déduira une interprétation de la valeur moyenne d'une fonction comme limite d'une suite.

c) Application du calcul intégral à l'évaluation, dans le plan rapporté à un repère orthogonal, de l'aire de la partie définie par :

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ o \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$, où f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

d) Sans théorie générale : autres applications géométriques, mécaniques, physiques, du calcul intégral ; exemples de calcul d'un volume, d'une masse, d'un moment d'inertie.

(Ce paragraphe d) ne fera l'objet d'aucune question de mathématiques au baccalauréat.)

e) Résolution des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants du premier et du second ordre.

On prouvera dans chaque cas l'existence et l'unicité de la solution vérifiant des « conditions initiales » données.

L'alinéa ci-dessous ne fera l'objet d'aucune question de mathématiques au baccalauréat.

Sur des exemples numériques, résolution d'une équation différentielle à coefficients constants de la forme $y'' + h y' + k y = a \cos(\omega x - \varphi)$.

IV. FONCTIONS VECTORIELLES ET CINEMATIQUE

a) Fonction vectorielle d'une variable réelle ; l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, ou encore $\mathbb{C}$ identifié à $\mathbb{R}^2$. Les définitions et les démonstrations seront données à l'aide des coordonnées.

Dérivée d'une fonction vectorielle. Dérivée d'une somme, d'un produit $\varphi \vec{V}$ (où $\vec{V}$ et φ sont respectivement à valeurs vectorielles et réelles), d'un produit scalaire, d'un produit vectoriel. Dérivée de la norme d'une fonction vectorielle.

b) Exemples simples de construction d'une courbe plane définie par une représentation paramétrique. (Toute étude de points singuliers ou de branches infinies est hors du programme.)

c) Cinématique du point. Trajectoire. Vecteur vitesse, vecteur accélération. Mouvement accéléré, mouvement retardé.

Mouvements rectilignes, circulaires ; mouvement circulaire uniforme, oscillateur harmonique (à support rectiligne).

(Au baccalauréat on se limitera à des mouvements dans le plan.)