Matrices, endomorphismes et formes symplectiques

Pour tout entier $p \geq 1$, on désigne par $\mathcal{M}_p$ l'espace vectoriel des matrices réelles à p lignes et p colonnes, et l'on désigne par I_p la matrice unité de $\mathcal{M}_p$. Si $M \in \mathcal{M}_p$, on note φ_M l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ de matrice M dans la base canonique. La transposée d'une matrice M est notée ${}^tM$. On note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire canonique et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^p$.

Pour tout entier pair $n = 2m$, on considère la matrice $J \in \mathcal{M}_{2m}$ définie par blocs

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie 1
Matrices symplectiques

1. On fixe l'entier pair $n = 2m$. On appelle *matrice symplectique* toute matrice $M \in \mathcal{M}_{2m}$ telle que
$${}^tMJM = J.$$
   (a) Que peut-on dire du déterminant d'une matrice symplectique?
   (b) L'ensemble des matrices symplectiques est-il un groupe pour la multiplication?
   (c) La matrice J est-elle symplectique?
   (d) La transposée d'une matrice symplectique est-elle symplectique?
2. On écrit toute matrice $M \in \mathcal{M}_{2m}$ par blocs, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, où $A,B,C,D \in \mathcal{M}_m$.
   (a) Montrer que la matrice M est symplectique si et seulement si les matrices A,B,C,D vérifient les conditions
$$\begin{cases} {}^tAC \text{ et } {}^tBD \text{ sont syémtriques,} \\ {}^tAD - {}^tCB = I_m. \end{cases}$$
   (b) Montrer que si D est inversible, il existe $Q \in \mathcal{M}_m$ telle que
$$M = \begin{pmatrix} I_m & Q \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A-QC & 0 \\ C & D \end{pmatrix}.$$
   En déduire que, si M est symplectique et D inversible, alors $\det(M) = 1$
   (c) Soient $B,D \in \mathcal{M}_m$ telles que ${}^tBD$ est symétrique. On suppose qu'il existe $s_1,s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 \neq s_2$ et $v_1,v_2 \in \mathbb{R}^m$ tels que $(\varphi_D - s_1\varphi_B)(v_1) = 0$ et $(\varphi_D - s_2\varphi_B)(v_2) = 0$. Montrer que le produit scalaire $(\varphi_D(v_1)|\varphi_D(v_2))$ est nul.

(d) On suppose que M est symplectique. Montrer que tout $v \in \mathbb{R}^m$ tel que $\varphi_D(v) = 0$ et $\varphi_B(v) = 0$ est nul. Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $D - sB$ est inversible. En déduire que $\det(M) = 1$. (On pourra introduire la matrice $\left(\begin{smallmatrix} I_m & 0 \\ -sI_m & I_m \end{smallmatrix}\right)$ et vérifier qu'elle est symplectique.)

3. Soit M une matrice symplectique et soit χ son polynôme caractéristique.
   (a) Montrer que, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, $\chi(\lambda) = \lambda^{2m}\chi(\frac{1}{\lambda})$.
   (b) Montrer que si $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ est valeur propre de M, de multiplicité d, alors $\frac{1}{\lambda_0}$, $\overline{\lambda_0}$, $\frac{1}{\overline{\lambda_0}}$ sont des valeurs propres de M, chacune de multiplicité d.
   (c) Que peut-on dire de l'ordre de multiplicité de -1 et 1?
   (d) On suppose dans cette question que $m = 2$. Donner des exemples de matrices symplectiques $\in \mathcal{M}_4$, diagonalisables sur $\mathbb{C}$ et ayant
      (1) une seule valeur propre;
      (2) deux valeurs propres doubles distinctes;
      (3) une valeur propre double et deux valeurs propres simples;
      (4) quatre valeurs propres distinctes non réelles et de module $\neq 1$.

      Dans chaque cas, dessiner les valeurs propres dans le plan complexe sur lequel on tracera d'abord le cercle de centre 0 et de rayon 1.

Partie 2
Formes symplectiques et endomorphismes symplectiques

Soit n un entier ≥ 1. On appelle *forme symplectique* sur $\mathbb{R}^n$ une application $\omega : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui est :

– bilinéaire : $\forall y \in \mathbb{R}^n$, l'application $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \omega(x,y)$ est linéaire et $\forall x \in \mathbb{R}^n$, l'application $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto \omega(x,y)$ est linéaire;
– antisymétrique : $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$, $\omega(x,y) = -\omega(y,x)$;
– non dégénérée : si $\forall y \in \mathbb{R}^n$ $\omega(x,y) = 0$, alors $x = 0$.

1. (a) Soit η un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $\eta^* = -\eta$, où η^* est l'adjoint de η par rapport au produit scalaire euclidien. On pose

   $$\forall x,y \in \mathbb{R}^n,\ \omega(x,y) = (\eta(x)|y). \tag{1}$$

   Montrer que ω est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si η est inversible.

   (b) Soit ω une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un endomorphisme η de $\mathbb{R}^n$ tel que la relation (1) soit vérifiée. Montrer que $\eta^* = -\eta$ et que η est inversible.
2. Montrer que s'il existe sur $\mathbb{R}^n$ une forme symplectique, alors n est pair.
3. On suppose dans cette question que $n = 2m$.On pose

   $$\forall x,y \in \mathbb{R}^{2m},\ \omega_0(x,y) = (\varphi_J(x)|y).$$

   (a) Montrer que ω_0 est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^{2m}$.

(b) Soit $(e_k)_{1\leq k\leq 2m}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2m}$. Calculer $\omega_0(e_k,e_\ell)$, $1 \leq k \leq 2m$, $1 \leq \ell \leq 2m$.

(c) Soit φ un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2m}$, et M sa matrice dans la base canonique. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x,y \in \mathbb{R}^{2m}$, $\omega_0(\varphi(x),\varphi(y) = \omega_0(x,y)$;

(ii) la matrice M est symplectique.

Un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2m}$ qui vérifie la propriété (i) ci-dessus est appelé *endomorphisme symplectique*.

4. Un endomorphisme φ de $\mathbb{R}^n$ est dit *stable* si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la suite $(\|\varphi^p(x)\|)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée, où φ^p désigne la composée de l'application φ avec elle même p fois.

(a) Montrer que si un endomorphisme φ de $\mathbb{R}^n$ a toutes ses valeurs propres distinctes et de module 1 dans $\mathbb{C}$, alors φ est stable.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\Omega \in \mathcal{M}_m$ pour que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2m}$ de matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{smallmatrix}\right)$ dans la base canonique soit symplectique et stable.

(c) Montrer que si un endomorphisme symplectique φ de $\mathbb{R}^{2m}$ possède une valeur propre dans $\mathbb{C}$ de module $\neq 1$, alors φ n'est pas stable.