Agrégation externe de Mathématiques
Rapport du jury 2005

8 août 2006

Table des matières

1 Concours Externe, leçons d'algèbre. Extraits des rapports du jury des sessions antérieures.

1.1 Théories des ensembles. Applications.

On a entendu des candidats affirmer que les objets d'une catégorie forment un ensemble !

1.2 Groupes opérant sur un ensemble. Applications

Les candidats n'ont pas l'air de connaître les résultats de base sur les groupes de Lie de dimension infinie, ni sur les opérations à droite et à gauche. L'exemple trivial des germes de difféomorphismes agissant à droite ou à gauche sur les germes d'applications entre deux variétés fournit de quoi illustrer ces notions sans sortir du programme.

1.3 Réseaux, sous-groupes cocompacts et métriques lorentziennes

Les candidats se contentent malheureusement trop souvent des réseaux d'un espace vectoriel, les meilleurs étudient de tels réseaux munis de formes quadratiques, évoquent parfois les systèmes de racines et le réseau évanescent d'une singularité.

1.4 Quotients dans une catégorie possédant suffisament de projectifs. Applications.

Il ne faudrait pas oublier de faire le lien entre les propriétés universelles et les foncteurs représentables.

1.5 Groupes finis

Le jury s'attend à trouver chez les candidats la connaissance des groupes finis d'ordre inférieur à 1000 et de leur table de caractères.

1.6 Géométrie des groupes discrets hyperboliques. Graphes.

Le minimum que l'on puisse demander aux candidats est de connaître la base de la théorie des sous-groupes discrets des groupes de Lie. Quand on leur demande des noms de mathématiciens célèbres ayant contribué à cette théorie, très (trop !) peu citent Poincaré !

1.7 Cardinaux et ordinaux. Exemples et applications

Les exposés doivent donner des démonstrations et pas seulement des considérations heuristiques. Un candidat n'a pas su donner des propositions simples équivalentes à l'hypothèse du continu.

1.8 Théorie de la descente, catégories dérivées. Applications.

L'ouvrage de base pour cette leçon est bien evidemment SGA 1, qui contient tout ce qu'il faut savoir, sous une forme absolument limpide. Plusieurs théorèmes contiennent des méthodes de calcul, qu'il faut savoir mettre en oeuvre, particulièrement dans cette leçon traitant de problèmes on ne peut plus concrets.

1.9 Exemples d'application de l'axiome du choix.

La démonstration du théorème de Tychonov en passant par les filtres est sans doute la plus rapide... Signalons que les plans manquent d'applications.

1.10 Groupes algébriques linéaires. Sous-groupes de Borel

Les candidats pensent pouvoir traiter cette leçon en se limitant aux notions abordées dans un ouvrage de R.Mneimné.

1.11 Sous-groupes finis de $O(n, \mathbb{R})$.

Beaucoup de candidats ne décollent pas du point de vue classique, ne parlent pas de groupes cristallographiques, et se limitent aux dimensions deux et trois, comme les années précédentes. Le jury aimerait entendre parler de cohomologie des groupes.

1.12 Produit libre, amalgames.

Les précédents rapports soulignent la richesse de l'exemple du groupe fondamental. Les candidats qui étudient cet exemple doivent bien sûr être en mesure de calculer des groupes fondamentaux classiques, comme le groupe fondamental d'une variété kählérienne donnée.

1.13 Limites inductives et projectives. Applications.

Se limiter à la catégorie des $\mathbb{R}$-modules de type fini sera fortement sanctionné. Quand ils se placent dans un cadre plus général, les candidats ne semblent pas douter de l'existence de ces objets, à tort !

1.14 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Exemples et contre-exemples

Une des leçons les plus abstraites, et pourtant correctement traitée par la plupart des candidats, qui sont dans l'ensemble mieux préparés qu'aux sessions précédentes.

1.15 Exemples de nombres premiers. Contre-exemples.

Leçon très difficile, visant l'exhaustivité.

1.16 Anneaux principaux, anneaux intégralement clos. Singularités de courbes algébriques

Un candidat s'est fait ridiculiser par un calcul de désingularisation torique pourtant trivial.

1.17 Idéaux, faisceaux d'idéaux d'un $\mathscr{O}_X$-module.

Il peut être bon de se limiter aux faisceaux cohérents. Dans ce cas, il faut pouvoir expliquer ce qu'est le faisceau des relations. Le lien avec l'exemple trivial des K-algèbres de type fini n'est jamais fait.

1.18 Homologie d'un complexe de chaînes, suites exactes

Un candidat s'est fait biter parce qu'il a oublié de vérifier que le complexe donné par le jury était effectivement exact, avant de se lancer dans les calculs.

1.19 Corps finis non commutatifs (la défense du plan sera primordiale).

Les candidats parlent de corps finis non commutatifs mais ne connaissent pas d'exemples de corps infinis non commutatifs, ni même parfois de corps infinis commutatifs. Bien que ces notions ne soient pas au programme, on ne saurait trop recommander aux candidats d'y reflechir avant les épreuves.

1.20 Exemples de constructions du cercle. Applications

On rappelle aux candidats que l'introduction abusive d'un outil qui vide un exercice ou un théorème de sa substance, tel ici un compas, n'est pas tolérée.

1.21 Équations diophantiennes, séries E.

Si on évoque le théorème de Fermat-Wiles, il faut savoir le démontrer.

1.22 Anneaux locaux, germes de fonctions. Applications

On demande souvent de démontrer que tel ou tel anneau de germes de fonctions est hensélien. Ce sont des exercices qui pourraient très bien tomber aux concours d'écoles d'ingénieurs au vu de leur excessive facilité.

1.23 Irréductibilité. Exemples et applications.

Les candidats ne mentionnant pas au moins la théorie des représentations ou les variétés algébriques irréductibles ne font que montrer la pauvreté de leurs connaissances.

1.24 Algèbre des polynômes à n indéterminées $(n >= 2)$.

Les leçons sur les polynômes ont été à peu près autant prises (51%) que rejetées. Inutile de dire qu'un autre titre de cette leçon pourrait très bien être « Géométrie Algébrique Classique »et que les candidats ne sachant pas relier le théorème de normalisation de Noether aux revêtements ramifiés n'ont que de faibles chance d'obtenir la moyenne.

1.25 Racines des polynômes, diviseurs de Weil et fibrés en droites.

Comme on l'a déjà souligné, examiner des cas de figure très simplifiés comme ici, permet de montrer sa bonne compréhension des phénomènes. Le cas élémentaires des surfaces de Riemann fournit beaucoup d'exemples. De façon générale, un exposé se limitant aux variétés complexes projectives satisfait le jury, les bons candidats pouvant envisager le cas non lisse et l'étude des diviseurs de Cartier.

1.26 Dimension de Krull d'un anneau et degré de transcendance. Applications

Les leçons sur les anneaux sont prises assez volontiers (par 54% des candidats à qui elles ont été proposées). Le jury est d'ailleurs assez satisfait des performances des candidats dans ces leçons.

1.27 Déterminant. Algèbre tensorielle. Exemples et contre-exemple

Les déterminants classiques au programme de maternelle supérieure sont à connaître par coeur !

1.28 Réduction des endomorphismes

Le jury a apprécié l'utilisation à bon escient de la combinatoire élémentaire des tableaux de Young. Il est entendu que pour une leçon d'aussi bas niveau, on demande une certaine virtuosité dans les calculs.

1.29 Sous-espaces stables et représentations

Cette leçon est dans l'ensemble très bien traitée, ces notions étant abordées dès le collège, parfois même au primaire dans les bonnes CM2*.

1.30 Diagonalisabilité, semi-simplicité. Exemples et applications.

On peut bien sûr exiger une classification complète des algèbre de Lie semi-simples complexes, c'est presque le titre de la leçon !

1.31 Application exponentielle sur une algèbre de Lie

Admettre le théorème de Hopf-Rinow pour démontrer que l'exponentielle est surjective sur un groupe compact est très mal vu, le jury s'attend à voir exposée la preuve par les algèbres de Lie compactes. Les tores maximaux constituent un jolie aplication, tout en restant élémentaire.

1.32 Algèbres, endomorphismes et groupes nilpotents. Exemples et contre-exemples

Les candidats n'ont tout simplement pas assimilé les notions d'algèbres nilpotentes, semi-simples, réductives, résolubles, etc... Dans ces conditions, il ne peuvent pas s'attendre à des notes supérieures à 4.

1.33 Modules de type fini. Application aux polynômes d'endomorphismes.

A propos des invariants de similitude, un candidat a bloqué lorsqu'il lui a été demandé de vérifier que deux matrices 10*10 étaient semblables.

1.34 Formes quadratiques, algèbres de Clifford et norme spinorielle. Applications

Les cas particuliers ne sont pas à mépriser. La dimension 1 (voire 0) est particulièrement riche.

1.35 Convexité

On ne peut raisonnablement traiter cette leçon sans parler des variétés faiblement pseudoconvexes.

1.36 Isométries de variétés riemanniennes, courbure.

Un candidat n'avait visiblement pas compris la différence entre le tore plat $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ et son plongement comme bouée de $\mathbb{R}^3$ avant que le jury lui demande de calculer les connexions de Levi-Civita des deux objets.

1.37 Coniques et cubiques projectives sur $\mathbb{Q}_l$. Applications

Cette leçon continue à être écartée par le plus grand nombre, à cause de sa difficulté. Les candidats qui s'y risquent ont des difficultés avec des calculs élémentaires, voire même avec les notations.

1.38 Dualité projective, pinceaux d'hypersurfaces.

Le jury reste perplexe quand un candidat, après avoir démontré la généricité des pinceaux de Lefschetz, est incapable d'en exhiber un ! Il semble que beaucoup soient persuadés que les sections singulières forment une hypersurface de $\mathbb{P}^\vee$, ce qui est faux en général. Remarquons aussi que beaucoup de candidats semblent oublier les notions les plus élémentaires d'analyse comme le théorème de Sard, pourtant crucial dans cette leçon !

1.39 Applications des octonions à la géométrie. Exemples et contre-exemples

Les candidats parlent de « pseudo »-algèbre sans trop savoir de quoi il en retourne. Quand on leur pose la question, la plupart ne sait pas si ce terme est d'origine grecque ou latine.

1.40 Utilisation des groupes en géométrie (on ne prétendra pas à l'exhaustivité).

Les candidats citent, voire proposent en développement, la construction d'un espace dont le groupe des isométries est le monstre, mais leur compréhension de ce groupe fort simple (il est fini !) reste très limitée.

1.41 Métrique de Möbius, espaces hyperboliques

Connaître ses formules de trigonométrie hyperbolique est la moindre des choses. De plus, on dispose ici de moyens mnémotechniques particulièrement simples.

1.42 Extensions quadratiques, construction d'un compas, applications.

Un candidat n'a pas réussi à construire son compas dans le temps imparti.

1.43 Applications affines, variétés affines, groupes algébriques affines.

Cette leçon a souvent donné lieu à des pseudo-cours trop théoriques.

1.44 Géométrie en dimension 2. Dessins d'enfants

Les illustrations géométriques font défaut. Lorsque des notions élémentaires ont l'air mal maîtrisées, le jury ne peut s'empecher de pêter un cable. Un candidat s'est révélé incapable de dire pourquoi un revêtement ramifié en au plus trois ponts de la sphère de Riemann peut-être défini par un polynôme à coefficients algébriques.

1.45 Combinatoire des groupes sporadiques

Un candidat s'est fait lourder sur le cardinal du monstre, les rapports précédents précisaient pourtant bien que ça pouvait tomber !