LEMME DU THÉORÈME SPECTRAL
POUR LES MATRICES SYMÉTRIQUES RÉELLES

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, noté $(\dots \mid \dots)$, et de la norme associée, notée $\|\dots\|$, et soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. • Montrer que l'application $f : X \mapsto \frac{(AX|X)}{\|X\|^2}$, de $U = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ dans $\mathbb{R}$, est différentiable en tout point $X \in U$, et déterminer sa différentielle df_X et son gradient $grad_X f$ en ce point.

2. • Montrer que l'application f admet un maximum global sur U, c'est-à-dire qu'il existe $X_0 \in U$ tel que : $\forall X \in U,\ f(X) \leq f(X_0)$ (*Ind.* considérer les valeurs de f sur la sphère-unité $S = \{X \in \mathbb{R}^n / \|X\| = 1\}$).

3. • Montrer que si la matrice A est symétrique, alors X_0 est un vecteur propre de A.

---

0. **Rappels**. • Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient u et v deux fonctions définies sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, différentiables au point $X \in U$. Alors, la fonction $f = uv$ est différentiable au point X, et l'on a, pour tout $H \in \mathbb{R}^n$: $df_X(H) = u(X)dv_X(H) + du_X(H)v(X)$.

• Soit v une fonction définie sur $U \subset \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, différentiable au point $X \in U$, et telle que : $v(X) \neq 0$. Alors, la fonction $f = \frac{1}{v}$ est diffé-rentiable au point X, et l'on a, pour tout $H \in \mathbb{R}^n$: $df_X(H) = -\frac{dv_X(H)}{(v(X))^2}$.

• Soient u et v deux fonctions définies sur $U \subset \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, différentiables au point $X \in U$, et telles que : $v(X) \neq 0$. Alors, la fonction $f = \frac{u}{v}$ est différentiable au point X, et l'on a, pour tout $H \in \mathbb{R}^n$: $df_X(H) = \frac{v(X)du_X(H) - u(X)dv_X(H)}{(v(X))^2}$.

• Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, et soit b sa forme polaire, qui est l'unique forme bilinéaire symétrique telle que : $q(X) = b(X,X)$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. Alors, l'application q de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est différentiable en tout point $X \in \mathbb{R}^n$, et l'on a, pour tout $H \in \mathbb{R}^n$: $dq_X(H) = 2b(X,H)$.

1. • Les fonctions : $X \mapsto u(X) = (AX \mid X)$ et $X \mapsto v(X) = \|X\|^2 = (X \mid X)$ sont des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$. Leurs formes polaires sont respectivement les formes bilinéaires : $(X,Y) \mapsto \frac{1}{2}((AX \mid Y) + (AY \mid X))$ et $(X,Y) \mapsto (X \mid Y)$. Ces fonctions u et v sont donc différentiables en tout point $X \in \mathbb{R}^n$, et l'on a, pour tout $H \in \mathbb{R}^n$: et : $dv_X(H) = 2(X \mid H)$, et : $du_X(H) = (AX \mid H) + (AH \mid X)$, linéaire en H.

• **Remarque**. Si l'on n'a pas étudié les formes quadratiques, on peut traiter directement cette question par un simple calcul. En effet :

$$\begin{aligned} u(X+H) &= (A(X+H) \mid X+H) = (AX+AH \mid X+H) \\ &= (AX \mid X) + (AX \mid H) + (AH \mid X) + (AH \mid H) \\ &= u(X) + du_X(H) + R(H), \end{aligned}$$

avec : $du_X(H) = (AX \mid H) + (AH \mid X)$, linéaire en H, et : $R(H) = (AH \mid H)$, d'où :

$|R(H)| = |(AH \mid H)| \leq \|AH\| \cdot \|H\| \leq \|A\| \cdot \|H\|^2$,

où $\|A\|$ désigne la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Et *idem* pour $v(X) = \|X\|^2 = (X \mid X)$, qui conduit au même calcul avec $A = I_n$, d'où : $dv_X(H) = 2(X \mid H)$.

• Si $X \neq 0$, la fonction $f = \frac{u}{v}$ est donc différentiable au point X, et sa différentielle est, pour tout $H \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} df_X(H) &= \frac{\|X\|^2((AX|H)+(AH|X)) - 2(AX|X)(X|H)}{\|X\|^4} \\ &= \frac{1}{\|X\|^2}((AX \mid H) + (AH \mid X)) - \frac{2(AX|X)}{\|X\|^4}(X \mid H). \end{aligned}$$

• Gradient. On a : $(AH \mid X) = (AH)^{\mathbf{T}}X = ((AH)^{\mathbf{T}}X)^{\mathbf{T}} = X^{\mathbf{T}}AH$
$= (A^{\mathbf{T}}X)^{\mathbf{T}}H = (A^{\mathbf{T}}X \mid H)$, d'où :

$$\begin{aligned} df_X(H) &= \frac{1}{\|X\|^2}((A + A^{\mathbf{T}})X \mid H) - \frac{2(AX|X)}{\|X\|^4}(X \mid H) \\ &= \frac{1}{\|X\|^2}((A + A^{\mathbf{T}})X - \frac{2(AX|X)}{\|X\|^2}X \mid H), \end{aligned}$$

ce qui se traduit par :

$$grad_X f = \frac{1}{\|X\|^2}((A+A^{\mathrm{T}})X - \frac{2(AX|X)}{\|X\|^2}X).$$

2. • Soit $S = \{X \in \mathbb{R}^n / \|X\| = 1\}$: c'est la sphère-unité, qui est incluse dans U, et compacte. La fonction f est continue sur U, à valeurs réelles, et elle admet donc un maximum sur S, ce qui signifie qu'il existe $X_0 \in S$ tel que, pour tout $X \in S$, on ait : $f(X) \leq f(X_0)$.

Soit à présent $X \in U$, d'où : $X \neq 0$, et soit : $r = \|X\| > 0$. On a : $\|\frac{1}{r}X\| = \frac{1}{r}\|X\| = 1$, d'où : $\frac{1}{r}X \in S$. On en déduit : $f(\frac{1}{r}X) \leq f(X_0)$. Or : $f(\frac{1}{r}X) = \frac{(A\frac{1}{r}X|\frac{1}{r}X)}{\|\frac{1}{r}X\|^2} = \frac{(AX|X)}{\|X\|^2} = f(X)$.

Ceci prouve que : $f(X) \leq f(X_0)$ pour tout $X \in U$.

3. • Si la matrice A est symétrique, alors : $A^{\mathrm{T}} = A$, d'où, pour tout $X \in U$ et tout $H \in \mathbb{R}^n$:

$$df_X(H) = \frac{2}{\|X\|^2}(AX - \frac{(AX|X)}{\|X\|^2}X \mid H).$$

• L'ensemble $U = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ est ouvert. Puisque f admet un maximum global sur U, au point $X_0 \in U$, il s'ensuit : $df_{X_0} = 0$.

On en déduit : $AX_0 - \frac{(AX_0|X_0)}{\|X_0\|^2}X_0 = 0$, soit : $AX_0 = \frac{(AX_0|X_0)}{\|X_0\|^2}X_0$.

RÉFÉRENCE

• Bruno Caminade, Serge Nicolas, sous la direction de Christian Gautier (STTL) et André Warusfel (STTL), *Mathématiques, tout-en-un, ECS 2e année*, Dunod, 2005, chapitre 7, exercice 24, p. 213.

Roger CUCULIÈRE • Lycée Pasteur, **92200 Neuilly-sur-Seine**
• 19/01/2008 • ***<rcuculiere@free.fr>*** **• ®©**

o···o