Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires et si P est un polynôme non constant tel que $P \circ f$ est continue, alors f est continue.

Commençons d'abord par remarquer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P(X) - P(f(x)) = (X - f(x))Q(X) \tag{1}$$

Q est non nul car P est non constant.

Raisonnons ensuite par l'absurde:

Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ un point en lequel f est discontinue. Il existe donc un réel $\epsilon > 0$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(x_n) - f(x)| > 2\epsilon$.

Modifions à présent la suite (x_n) :

Si $f(x_n) - f(x) > 2\epsilon$, on se fixe un $y \in]f(x) + \epsilon, f(x) + 2\epsilon[$ tel que y ne soit pas racine de Q; puisque $y \in]f(x), f(x_n)[$, par la propriété des valeurs intermédiaires, on sait qu'il existe un $u_n \in]x, x_n[$ ou $]x_n, x[$ tel que $f(u_n) = y$.

De même, si $f(x_n) - f(x) < -2\epsilon$, on définit u_n comme étant un réel de $]x, x_n[$ ou $]x_n, x[$, antécédent d'un $z \in]f(x) - 2\epsilon, f(x) - \epsilon[$ par f où z n'est pas racine de Q.

Posons alors $m = \min(|Q(y)|, |Q(z)|) > 0$. D'après (1), $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(f(u_n)) - P(f(x)) = (f(u_n) - f(x))Q(f(u_n))$ et, en passant à la valeur absolue:

$$|P(f(u_n)) - P(f(x))| = |f(u_n) - f(x)| \times |Q(f(u_n))| > \epsilon m$$

Or $P \circ f$ est continue et (u_n) converge vers x donc le premier membre tend vers 0 ce qui est la contradiction recherchée.