Alain Legendre

6 août 2008

Valeurs d'adhérence de la suite $(n|\sin n|)$

La densité bien connue de $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $[-1\,;\,1]$ montre que $\limsup n|\sin n| = +\infty$. Mais a-t-on $\liminf n|\sin n| = 0$ et, plus généralement, qu'en est-il des valeurs d'adhérence *réelles* de $(n|\sin n|)$?

Comme on va le voir, le seul résultat vraiment acquis est que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(n|\sin n|)$ est infini (théorème 7), mais on ne sait toujours pas si 0 en fait partie. Cependant on établira d'emblée (théorème 3) que, si c'est le cas, alors $(n|\sin n|)$ est dense dans $\mathbb{R}_+$ et la question serait alors résolue.

1 Rappel

Nous utiliserons les inégalités classiques suivantes :

1. Pour tout réel x
$$|\sin x| \leq |x| \tag{1}$$
2. Pour tout réel $x \geq 0$
$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \tag{2}$$
3. Pour tout réel x tel que $|x| \leq 2$
$$|\sin x| \geq \left| x - \frac{x^3}{6} \right| \tag{3}$$

Commençons par établir un lemme technique pour la preuve du théorème 3 plus loin :

2 Lemme

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(A) $\liminf\ n|\sin n| = 0$.

(B) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux entiers non nuls p et q premiers entre eux tels que*

$$|p - q\pi| < \frac{\varepsilon}{p}$$

□ **Démonstration :** supposons d'abord l'affirmation (B). Pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, il existe deux entiers non nuls p et q premiers entre eux tels que $|p - q\pi| < \frac{\varepsilon}{p}$. Alors

$$p|\sin p| = p|\sin(p - q\pi)| \leq p|p - q\pi| < \varepsilon$$

et ainsi 0 est point d'accumulation de l'ensemble $\{n|\sin n|\,,\, n \in \mathbb{N}\}$, donc est valeur d'adhérence de la suite $(n|\sin n|)$ et c'est évidemment la plus petite.

Réciproquement, si 0 est valeur d'adhérence de $(n|\sin n|)$, alors, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un entier p arbitrairement grand tel que $p|\sin p| < \frac{\varepsilon}{3}$, et donc tel que, pour tout entier q, on ait $|\sin(p - q\pi)| < \frac{\varepsilon}{3p}$.

Choisissons alors q tel que $|p - q\pi| \leq 2$ (ce qui est loisible puisque l'intervalle réel $\left[\frac{p-2}{\pi}\,;\,\frac{p+2}{\pi}\right]$ est de longueur strictement supérieure à 1), et, quitte à diviser l'inégalité $|p - q\pi| \leq 2$ par $\operatorname{pgcd}(p, q)$, on peut toujours suposer que p et q sont premiers entre eux.

En appliquant l'inégalité (3) à $x = |p - q\pi|$, on a

$$|\sin(p - q\pi)| \geq \left| |p - q\pi| - \frac{|p - q\pi|^3}{6} \right| = |p - q\pi| \left| 1 - \frac{|p - q\pi|^2}{6} \right| \geq \frac{1}{3}|p - q\pi|$$

la dernière égalité étant obtenue en remarquant que $|p - q\pi|^2 \leq 4$. Finalement, nous avons établi l'existence de deux entiers non nuls p et q premiers entre eux vérifiant

$$\frac{1}{3}|p - q\pi| \leq |\sin(p - q\pi)| < \frac{\varepsilon}{3p}$$

soit donc $|p - q\pi| < \frac{\varepsilon}{p}$. $\square$

On peut maintenant énoncer le résultat essentiel :

3 Théorème
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(A) $\liminf n|\sin n| = 0$.

(B) $(n|\sin n|)$ *est dense dans* $\mathbb{R}_+$.

$\square$ **Démonstration :** bien entendu, seule l'implication (A) $\Rightarrow$ (B) mérite attention. Etant donnés un réel $x > 0$ fixé et $\varepsilon > 0$ « arbitrairement petit » (précisément, on utilisera $\varepsilon < \min\left(x\,,\,\frac{4}{x}\right)$), on va montrer qu'il existe un entier n tel que $x - 2\varepsilon \leq n|\sin n| \leq x$.

Soit $\alpha > 0$ tel que $\alpha < \min\left(\frac{\varepsilon^2}{4x}\,,\,\varepsilon\right)$. Le lemme 2 nous donne l'existence de deux entiers non nuls p et q premiers entre eux vérifiant $|p - q\pi| < \frac{\alpha}{p}$.

Notons m la partie entière du réel

$$\sqrt{\frac{x}{|p - q\pi|p}}$$

et remarquons tout de suite que $m \geq 1$ puisque $|p - q\pi| < \frac{\alpha}{p}$ entraîne

$$\frac{x}{p|p - q\pi|} \geq \frac{x}{\alpha} \geq \frac{x}{\varepsilon} > 1$$

compte tenu de l'hypothèse $\varepsilon < x$.

Le but de la démonstration est d'établir les inégalités

$$x - 2\varepsilon \leq mp\,|\sin(mp)| \leq x \tag{4}$$

ce qui prouvera l'assertion voulue.

On a d'abord la chaîne d'inégalités suivantes :

$$0 \leq \sqrt{\frac{x|p - q\pi|}{p}} - |p - q\pi| \leq m|p - q\pi| \leq \sqrt{\frac{x|p - q\pi|}{p}} \tag{5}$$

En effet, l'inégalité de gauche de équivaut à $\frac{x}{p|p-q\pi|} \geq 1$, ce qui a déjà été établi ci-dessus. Pour les inégalités de droite de (5), il suffit de noter que

$$\sqrt{\frac{x|p - q\pi|}{p}} - |p - q\pi| = |p - q\pi|\left(\sqrt{\frac{x}{|p - q\pi|p}} - 1\right) \leq m|p - q\pi|$$

$$\leq |p - q\pi|\sqrt{\frac{x}{|p - q\pi|p}} = \sqrt{\frac{x|p - q\pi|}{p}}$$

Venons-en maintenant à la démonstration proprement dite : on a d'une part, avec (1) et (5),

$$|\sin(mp)| = |\sin(mp - mq\pi)| \leq m|p - q\pi| \leq \sqrt{\frac{x|p - q\pi|}{p}}$$

d'où

$$mp\,|\sin(mp)| \leq \sqrt{\frac{xp}{|p-q\pi|}}\sqrt{\frac{x|p-q\pi|}{p}} = x$$

ce qui donne l'inégalité de droite de (4). Pour l'inégalité de gauche de (4), on a d'abord, avec (2) et (5),

$$|\sin(mp)| = \sin m|p-q\pi| \geq m|p-q\pi|\left(1-\frac{m^2|p-q\pi|^2}{6}\right) \geq \left(\sqrt{\frac{x|p-q\pi|}{p}}-|p-q\pi|\right)\left(1-\frac{x|p-q\pi|}{6p}\right)$$

De plus, comme on l'a déjà vu,

$$\sqrt{\frac{x}{|p-q\pi|p}}-1 \leq m \quad \text{donc} \quad mp \geq \sqrt{\frac{xp}{|p-q\pi|}}-p$$

Pour résumer, si nous notons

$$A = \sqrt{\frac{xp}{|p-q\pi|}}-p$$

$$B = \sqrt{\frac{x|p-q\pi|}{p}}-|p-q\pi|$$

$$C = 1-\frac{x|p-q\pi|}{6p}$$

on a donc montré $mp\,|\sin(mp)| \geq ABC$.

Examinons maintenant de plus près ce produit ABC : on a d'abord

$$AB = x - 2\sqrt{x|p-q\pi|p} + |p-q\pi|p \geq x - 2\sqrt{x|p-q\pi|p}$$

Mais comme $|p-q\pi| < \frac{\alpha}{p} < \frac{\varepsilon^2}{4px}$, on a $2\sqrt{x|p-q\pi|p} \leq \varepsilon$ et donc

$$AB \geq x-\varepsilon$$

Par suite

$$ABC \geq (x-\varepsilon)C = x-\varepsilon-(x-\varepsilon)\frac{x|p-q\pi|}{6p} \geq x-\varepsilon-\frac{x^2|p-q\pi|}{6p}$$

Or, toujours puisque $|p-q\pi| < \frac{\alpha}{p}$,

$$\frac{x^2|p-q\pi|}{6p} \leq \frac{x^2\alpha}{6p^2} \leq x^2\alpha \leq x^2\frac{\varepsilon^2}{4x} = \frac{x\varepsilon}{4}\varepsilon < \varepsilon$$

la dernière inégalité résultant de l'hypothèse $\varepsilon < \frac{4}{x}$. Ainsi, $ABC \geq x - 2\varepsilon$, et on a donc établi l'inégalité de gauche de (4), ce qui achève la preuve. □

Notons que, pour l'instant, nous ne disposons d'aucune valeur d'adhérence réelle de $(n|\sin n|)$. Pour en établir l'existence, nous aurons besoin d'un résultat bien connu d'approximation diophantienne :

4 Lemme (théorème de Dirichlet)

Soit $x > 0$ un nombre réel irrationnel. Il existe deux suites d'entiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telles que, pour tout entier n,

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n^2}$$

□ **Démonstration :** pour $n \geq 1$ entier fixé, notons $a_n = nx - \lfloor nx \rfloor$ où $\lfloor \cdots \rfloor$ désigne la partie entière. Pour tout entier $m \neq n$, on a

$$a_n - a_m = (n-m)x - (\lfloor nx \rfloor - \lfloor mx \rfloor) \neq 0$$

puisque x est irrationnel. Les $n+1$ nombres a_k obtenus pour $k = 0, \cdots, n$ sont donc deux à deux distincts et tous dans $[0;1]$. Par suite (principe des « tiroirs »), on peut trouver $r < s$ entiers dans $\{0, \cdots, n\}$ tels que

$$|a_r - a_s| \leq \frac{1}{n}$$

Définissons alors $q_n = s - r$ et $p_n = \lfloor sx \rfloor - \lfloor rx \rfloor$. On voit que $1 \leq q_n \leq n$ et l'inégalité précédente se ré-écrit

$$|xq_n - p_n| \leq \frac{1}{n} \tag{6}$$

c'est-à-dire

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{nq_n} \leq \frac{1}{q_n^2}$$

ce qui prouve l'inégalité annoncée. On remarquera également que l'inégalité (6) conduit aussi, puisque $q_n \geq 1$, à

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{n}$$

ce qui montre que la suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ converge vers x.

Reste à montrer que (p_n) et (q_n) tendent vers $+\infty$. Supposons d'abord par l'absurde que (q_n) ne tende pas vers $+\infty$: alors elle admet (au moins) une valeur d'adhérence *dans* $\mathbb{R}$, ie elle possède une sous-suite $(q_{\phi(n)})$ convergente vers un réel q. Mais, s'agissant d'une suite d'entiers, c'est donc que $(q_{\phi(n)})$ est stationnaire en $q \in \mathbb{N}^*$. Comme $(p_{\phi(n)})$ converge vers xq et que c'est aussi une suite d'entiers, c'est donc que $xq = p \in \mathbb{N}^*$, ce qui contredit l'irrationalité de x. Enfin, comme $p_n \sim xq_n$, il est clair que (p_n) tend aussi vers $+\infty$. □

5 Théorème (existence d'une valeur d'adhérence)

La suite $(n|\sin n|)$ *admet au moins une valeur d'adhérence réelle.*

□ **Démonstration :** d'après le lemme 4, on dispose donc de deux suites d'entiers (p_n) et (q_n) tendant vers $+\infty$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|p_n - q_n\pi| \leq \frac{1}{q_n}$$

d'où

$$|\sin p_n| = |\sin(p_n - q_n\pi)| \leq |p_n - q_n\pi| \leq \frac{1}{q_n}$$

et donc

$$p_n|\sin p_n| \leq \frac{p_n}{q_n}$$

Comme la suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ converge vers π, elle est bornée et il en est donc de même de la suite $(p_n|\sin p_n|)$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, cette suite admet une valeur d'adhérence réelle, qui est aussi valeur d'adhérence de la suite $(n|\sin n|)$. □

6 Remarque

On a déjà noté que $+\infty$ est valeur d'adhérence (dans $\overline{\mathbb{R}}$) de $(n|\sin n|)$. Le théorème 5 montre donc la divergence de la suite $(n|\sin n|)$, et, incidemment, celle de terme général $\frac{1}{n \sin n}$.

7 Corollaire (infinité de valeurs d'adhérence)

La suite $(n|\sin n|)$ *admet une infinité de valeurs d'adhérence réelles.*

□ **Démonstration :** le théorème 5 nous fournit une valeur d'adhérence x de $(n|\sin n|)$. Si $x = 0$, alors le résultat est acquis par le théorème 3. Sinon, c'est que $x > 0$ et, par définition, il existe une suite d'entiers (h_n) tendant vers $+\infty$ telle que $x = \lim_{n\to+\infty} h_n|\sin h_n|$, ce qui impose $\lim_{n\to+\infty} |\sin h_n| = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} |\cos h_n| = 1$.

Alors

$$2h_n|\sin(2h_n)| = 4h_n\,|\sin h_n|\,|\cos h_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4x$$

ie la sous-suite $(2h_n)$ converge vers $4x$, donc $4x$ est encore valeur d'adhérence de $(n|\sin n|)$. Par suite, on voit par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le réel $4^k x$ est valeur d'adhérence de $(n|\sin n|)$. □

8 Commentaire (perspectives ?)

Si le lemme 4 ne suffit pas pour établir que $\liminf n|\sin n| = 0$, il se pourrait tout de même qu'un espoir de solution puisse naître d'une forme « plus explicite » d'approximation diophantienne : le développement en *fraction continue*.

Si $\pi = [a_0, a_1, a_2, \cdots]$ désigne le développement en fraction continue (simple) de π, et si on note $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n]$ la réduite d'ordre n de ce développement, on sait [1] que

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \pi\right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$$

et ainsi

$$p_n\,|\sin p_n| = p_n\,|\sin(p_n - \pi q_n)| \leq p_n\,|p_n - \pi q_n| < \frac{p_n}{q_n}\,\frac{1}{a_{n+1}}$$

La suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ des réduites étant à l'évidence bornée (puisqu'elle converge vers π), on obtient l'existence d'un réel positif M tel que, pour tout entier n,

$$p_n\,|\sin p_n| < \frac{M}{a_{n+1}}$$

Donc, *si* on avait $\limsup a_n = +\infty$, c'est-à-dire *si* la suite (a_n) des quotients successifs du développement en fraction continue de π n'était pas bornée, on aurait immédiatement $\liminf n|\sin n| = 0$. Cette hypothèse paraîtra d'autant plus légitime en se rappelant [2] que l'ensemble des réels pour lesquels la suite (a_n) des quotients successifs est *bornée* est de mesure nulle. Malheureusement, le développement en fraction continue de π est encore très mal connu et rien, à ce jour, ne vient confirmer cette intuition.

1. Hardy et Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, 5th edition, Oxford U.P. 1978, chapitre XI.
2. Même référence que ci-dessus.