Nous terminons cette section par quelques généralités concernant *les idéaux qui évitent le conducteur*. La situation en théorie des nombres est la suivante. On a un corps de nombres $\mathbf{K} = \mathbb{Q}[\alpha]$ avec $\alpha$ entier sur $\mathbb{Z}$. On note $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers de $\mathbf{K}$, c'est-à-dire la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbf{K}$. Bien que ce soit en principe possible, il n'est pas toujours facile d'obtenir une base de $\mathbf{Z}$ comme $\mathbb{Z}$-module, ni d'étudier la structure du monoïde (multiplicatif) des idéaux de type fini de $\mathbf{Z}$.

On suppose que l'on dispose d'un anneau $\mathbf{Z}'$ qui constitue une approximation de $\mathbf{Z}$ en ce sens que $\mathbb{Z}[\alpha] \subseteq \mathbf{Z}' \subseteq \mathbf{Z}$. Par exemple en un premier temps $\mathbf{Z}' = \mathbb{Z}[\alpha]$. On est intéressé par la structure multiplicative du groupe des idéaux fractionnaires de $\mathbf{Z}$([7]), et l'on veut s'appuyer sur celle de $\mathbf{Z}'$ pour l'étudier en détail.

Le théorème qui suit dit que «cela marche très bien pour la plupart des idéaux, c'est-à-dire pour tous ceux qui évitent le conducteur de $\mathbf{Z}'$ dans $\mathbf{Z}$».

**8.23. Définition.**
Soient deux anneaux $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathbf{A}$ et $\mathfrak{b}$ un idéal de $\mathbf{B}$.

1. Le *conducteur de* $\mathbf{A}$ *dans* $\mathbf{B}$ est $(\mathbf{A} : \mathbf{B}) = \{\, x \in \mathbf{B} \mid x\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} \,\}$.
2. L'*extension de* $\mathfrak{a}$ est l'idéal $\mathfrak{a}\mathbf{B}$ de $\mathbf{B}$.
3. La *contraction de* $\mathfrak{b}$ est l'idéal $\mathbf{A} \cap \mathfrak{b}$ de $\mathbf{A}$.

*Remarque.* La terminologie concernant le conducteur est flottante. Des auteurs disent «conducteur de $\mathbf{B}$ dans $\mathbf{A}$» là où nous disons «conducteur de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{B}$». Pour eux, conducteur est synonyme de transporteur. En théorie des nombres, Dedekind a introduit la notion de conducteur en tant qu'idéal attaché au «petit anneau» (un sous-anneau $\mathbf{A}$ de l'anneau d'entiers $\mathbf{Z}$ d'un corps de nombres, avec même corps de fractions). ■

**8.24. Théorème.** (Théorème de Dedekind, idéaux qui évitent le conducteur) *Soient* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ *deux anneaux et* $\mathfrak{f}$ *le conducteur de* $\mathbf{A}$ *dans* $\mathbf{B}$.

1. *L'idéal* $\mathfrak{f}$ *est l'annulateur du* $\mathbf{A}$*-module* $\mathbf{B}/\mathbf{A}$. *C'est à la fois un idéal de* $\mathbf{A}$ *et un idéal de* $\mathbf{B}$, *et c'est le plus grand idéal pour cette propriété.*

*On note* $\mathcal{A}$ *(resp.* $\mathcal{B}$*) la classe des idéaux de* $\mathbf{A}$ *(resp. de* $\mathbf{B}$*) comaximaux à* $\mathfrak{f}$.

2. *Pour* $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$, *on a* $\mathbf{A}/\mathfrak{a} \simeq \mathbf{B}/\mathfrak{a}\mathbf{B}$ *et pour* $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$, *on a* $\mathbf{B}/\mathfrak{b} \simeq \mathbf{A}/\mathbf{A} \cap \mathfrak{b}$.
3. $\mathcal{A}$ *est stable par multiplication, somme, intersection et vérifie :*
$$\mathfrak{a} \in \mathcal{A},\ \mathfrak{a}' \supseteq \mathfrak{a} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{a}' \in \mathcal{A}.$$
*En particulier,* $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \in \mathcal{A}$ *si, et seulement si,* $\mathfrak{a}_1$ *et* $\mathfrak{a}_2 \in \mathcal{A}$. *Les mêmes propriétés sont valables pour* $\mathcal{B}$.

7. Un idéal fractionnaire de $\mathbf{Z}$ est un sous-$\mathbf{Z}$-module de $\mathbf{K}$ de la forme $\frac{1}{m}\,\mathfrak{a}$ pour un $m \in \mathbb{Z}^\star$ et un idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{Z}$, cf. page 608.

4. *L'extension et la contraction, restreintes respectivement à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, sont deux correspondances réciproques l'une de l'autre. Elles préservent la multiplication, l'inclusion, l'intersection et le caractère de type fini.*

5. *On suppose* $\mathbf{B}$ *intègre. Alors, un idéal* $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$ *est inversible dans* $\mathbf{A}$ *si, et seulement si,* $\mathfrak{a}\mathbf{B}$ *l'est dans* $\mathbf{B}$. *De même, un idéal* $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$ *est inversible dans* $\mathbf{B}$ *si, et seulement si,* $\mathbf{A} \cap \mathfrak{b}$ *l'est dans* $\mathbf{A}$.

D On montre seulement quelques propriétés. Remarquons que l'on a toujours les inclusions $\mathfrak{a} \subseteq \mathbf{A} \cap \mathfrak{a}\mathbf{B}$ et $(\mathbf{A} \cap \mathfrak{b})\mathbf{B} \subseteq \mathfrak{b}$.

Soit $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$, donc $1 = a + f$ avec $a \in \mathfrak{a}$ et $f \in \mathfrak{f}$; a fortiori, $1 \in \mathfrak{a}\mathbf{B} + \mathfrak{f}$. Montrons que $\mathbf{A} \cap \mathfrak{a}\mathbf{B} = \mathfrak{a}$. On prend $x \in \mathbf{A} \cap \mathfrak{a}\mathbf{B}$ et l'on écrit

$$x = xf + xa \in \mathfrak{a}\mathbf{B}\mathfrak{f} + \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}\mathbf{A} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}\,.$$

D'où le résultat. On voit aussi que $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathfrak{a}\mathbf{B}$, donc le morphisme composé $\mathbf{A} \to \mathbf{B}/\mathfrak{a}\mathbf{B}$ est surjectif de noyau $\mathfrak{a}$, ce qui donne un isomorphisme $\mathbf{A}/\mathfrak{a} \simeq \mathbf{B}/\mathfrak{a}\mathbf{B}$.

Soit $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$, donc $1 = b + f$ avec $b \in \mathfrak{b}$, $f \in \mathfrak{f}$. Puisque $\mathfrak{f} \subseteq \mathbf{A}$, on a $b \in \mathbf{A} \cap \mathfrak{b}$ donc $1 \in \mathbf{A} \cap \mathfrak{b} + \mathfrak{f}$. Montrons que $(\mathbf{A} \cap \mathfrak{b})\mathbf{B} = \mathfrak{b}$.
Si $x \in \mathfrak{b}$, alors :

$$x = (b + f)x = bx + xf \in (\mathbf{A} \cap \mathfrak{b})\mathbf{B} + \mathfrak{b}\mathfrak{f} \subseteq (\mathbf{A} \cap \mathfrak{b})\mathbf{B} + \mathbf{A} \cap \mathfrak{b} \subseteq (\mathbf{A} \cap \mathfrak{b})\mathbf{B}.$$

Ainsi $\mathfrak{b} \subseteq (\mathbf{A} \cap \mathfrak{b})\mathbf{B}$ puis $\mathfrak{b} = (\mathbf{A} \cap \mathfrak{b})\mathbf{B}$. De plus, puisque $\mathbf{B} = \mathfrak{b} + \mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{b} + \mathbf{A}$, le morphisme composé $\mathbf{A} \to \mathbf{B}/\mathfrak{b}$ est surjectif, de noyau $\mathbf{A} \cap \mathfrak{b}$, ce qui donne un isomorphisme $\mathbf{A}/\mathbf{A} \cap \mathfrak{b} \simeq \mathbf{B}/\mathfrak{b}$.

L'extension est multiplicative, donc la contraction (restreinte à $\mathcal{B}$) qui est son inverse, est également multiplicative. La contraction est compatible avec l'intersection, donc l'extension (restreinte à $\mathcal{A}$) qui est son inverse, est également compatible avec l'intersection.

Soit $\mathfrak{b} = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle_{\mathbf{B}} \in \mathcal{B}$. Montrons que $\mathbf{A} \cap \mathfrak{b}$ est de type fini.
On écrit $1 = a + f^2$ avec $a \in \mathfrak{b}$, $f \in \mathfrak{f}$. Puisque $f \in \mathbf{A}$, on a $a \in \mathbf{A} \cap \mathfrak{b}$. Montrons que $(a, fb_1, \ldots, fb_n)$ est un système générateur de $\mathbf{A} \cap \mathfrak{b}$.
Soit $x \in \mathbf{A} \cap \mathfrak{b}$ que l'on écrit $x = \sum_i y_i b_i$ avec $y_i \in \mathbf{B}$, alors :

$$x = \textstyle\sum_i (y_i a + y_i f^2) b_i = xa + \sum_i (y_i f) f b_i \in \langle a, fb_1, \ldots, fb_n \rangle_{\mathbf{A}}\,.$$

Pour un idéal $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$ (non nécessairement de type fini), on a en fait montré le résultat suivant : si $1 = a + f^2$ avec $a \in \mathfrak{b}$ et $f \in \mathfrak{f}$, alors $\mathbf{A} \cap \mathfrak{b} = \mathbf{A}a + f(f\mathfrak{b})$ (et $f\mathfrak{b}$ est un idéal de $\mathbf{A}$).

Soit $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$ un idéal inversible, montrons que $\mathfrak{a} = \mathbf{A} \cap \mathfrak{b}$ est un idéal inversible. On écrit $1 = a + f$ avec $a \in \mathfrak{b}$ et $f \in \mathfrak{f}$, de sorte que $a \in \mathfrak{a}$.
Si $a = 0$, alors $1 = f \in \mathfrak{f}$, donc $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ et il n'y a rien à montrer. Sinon, $a$ est régulier et il existe un idéal $\mathfrak{b}'$ de $\mathbf{B}$ tel que $\mathfrak{b}\mathfrak{b}' = a\mathbf{B}$.
Puisque les idéaux $a\mathbf{B}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ sont comaximaux à $\mathfrak{f}$, on peut appliquer le caractère multiplicatif de la contraction à l'égalité $\mathfrak{b}\mathfrak{b}' = a\mathbf{B}$ pour obtenir l'égalité $\mathfrak{a}\mathfrak{a}' = a\mathbf{A}$ avec $\mathfrak{a}' = \mathbf{A} \cap \mathfrak{b}'$. □