Quelques calculs dans le triangle

Gilles Auriol
auriolg@free.fr — http ://auriolg.free.fr

On considère un triangle ABC de côtés a, b, c dans lequel on désigne par G le centre de gravité, H l'orthocentre, par O le centre du cercle circonscrit (O, R) et I et I_a les centres du cercle inscrit (I, r) et exinscrit dans l'angle A (I_a, r_a). On notera comme p le demi-périmètre et S l'aire du triangle.

On utilisera également les notations de Conway

$$S_A = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)^2\right] = \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2)$$

et S_B, S_C définis par permutation circulaire.

1 Calcul barycentrique

1.1 Formule de Leibniz

1 Définition. — *Soit $(A, x), (B, y), (C, z)$ une famille de point pondérés. On appelle fonction de Leibniz la fonction f à valeur réelle définie par*

$$X \mapsto xXA^2 + yXB^2 + zXC^2.$$

Pour tout point X et M on a

$$\begin{aligned} f(X) &= x(\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MA})^2 + y(\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MB})^2 + z(\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MC})^2 \\ &= (x + y + z)XM^2 + 2\overrightarrow{XM} \cdot \left(x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC}\right) + xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 \\ &= f(M) + 2\overrightarrow{XM} \cdot \overrightarrow{u} + (x + y + z)XM^2. \end{aligned}$$

où on a posé $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC}$. On a alors le résultat suivant.

2 Théorème (Formule de Leibniz). — *(i) Si $x + y + z = 0$, la fonction f est affine.*

(ii) Si $x + y + z \neq 0$, considérons le barycentre M de $(A, x), (B, y), (C, z)$. On a

$$f(M) = \frac{xyAB^2 + yzBC^2 + zxCA^2}{x + y + z}.$$

et par conséquent

$$f(X) = f(M) + (x + y + z)XM^2 = (x + y + z)XM^2 + \frac{xyAB^2 + yzBC^2 + zxCA^2}{x + y + z}.$$

Preuve. — (i) En appelant l la fonction linéaire définie par $\overrightarrow{x} \mapsto 2\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{u}$ on peut écrire $\overrightarrow{f(X)f(M)} = l\left(\overrightarrow{XM}\right)$, ce qui montre que la fonction de Leibniz est affine.

(ii) Le point M étant barycentre de $(A, x), (B, y), (C, z)$, il est clair que

$$f(X) = f(M) + (x + y + z)XM^2.$$

Le réel $f(M)$ peut être calculé de la façon suivante : on remplace successivement X par A, B, C, ce qui donne les égalités

$$\begin{aligned} yAB^2 + zAC^2 &= f(M) + (x+y+z)AM^2 \\ xBA^2 + zBC^2 &= f(M) + (x+y+z)BM^2 \\ xCA^2 + yCB^2 &= f(M) + (x+y+z)CM^2 \end{aligned}$$

En multipliant la première par x, la seconde par y et la troisième par z et en ajoutant il vient

$$2(xyAB^2 + yzBC^2 + zxCA^2) = (x+y+z)f(M) + (x+y+z)f(M)$$

d'où l'on déduit $f(M) = \dfrac{xyAB^2 + yzBC^2 + zxCA^2}{x+y+z}$. ■

3 Théorème. — *(i) Une équation barycentrique de la médiatrice de $[BC]$ est*

$$x(c^2 - b^2) - ya^2 + za^2 = 0.$$

Les coordonnées barycentriques du centre du cercle circonscrit sont

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2) : b^2(c^2 + a^2 - b^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2)$$

(ii) Une équation barycentrique de la hauteur issue de A est

$$y(c^2 + a^2 - b^2) - z(a^2 + b^2 - c^2) = 0.$$

Les coordonnées barycentriques de l'orthocentre sont

$$(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) : (a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2) : (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)$$

(iii) Les coordonnées barycentriques du centre du cercle d'Euler sont

$$a^2(b^2 + c^2) - (b^2 - c^2)^2 : b^2(c^2 + a^2) - (c^2 - a^2)^2 : c^2(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)^2$$

Preuve. — (i) Un point M appartient à la médiatrice de $[BC]$ si et seulement si $MB^2 = MC^2$. La fonction de Leibniz $f : M \mapsto MB^2 - MC^2$ est affine donc, si M a pour coordonnées barycentriques normalisées $(x : y : z)$ (c'est-à-dire $x + y + z = 1$)

$$f(M) = xf(A) + yf(B) + zf(C) = x(AB^2 - AC^2) - yBC^2 + zCB^2,$$

d'où l'équation cherchée. Par permutation circulaire $a \mapsto b \mapsto c \mapsto a$ et $x \mapsto y \mapsto z \mapsto x$, on en déduit les équations respectives des médiatrices de $[AC]$ et $[AB]$

$$xb^2 + y(a^2 - c^2) - zb^2 = 0 \text{ et } -xc^2 + yc^2 + z(b^2 - a^2) = 0.$$

Remarquons que la somme des trois équations est nulle. Le système est de rang 2, sa résolution conduit aux coordonnées de O.

(ii) Un point M appartient à la hauteur issue de A si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Soit de coordonnées barycentriques normalisées $M(x : y : z)$. De $\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$ on déduit

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = y\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + z\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = -yS_B + zS_C$$

soit

$$2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = y(b^2 - a^2 - c^2) + z(a^2 + b^2 - c^2)$$

ce qui conduit à l'équation annoncée de la hauteur. La résolution du système est ici immédiate.

(iii) Le centre du cercle d'Euler est le milieu de $[OH]$. Sa première coordonnée est

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2) + (c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = a^2(b^2 + c^2) - (b^2 - c^2)^2.$$

Les autres s'en déduisent par permutation circulaire. ■

1.2 Équation barycentrique des cercles

4 Théorème. — *Soit A, B, C trois points non alignés, Γ le cercle circonscrit à ABC et γ un cercle du plan. On note Γ et γ les fonctions puissances par rapport à ces cercles.*

Si M est un point de coordonnées barycentriques $(x : y : z)$, on a

$$\gamma(M) = \Gamma(M) + \frac{x}{x+y+z}\gamma(A) + \frac{y}{x+y+z}\gamma(B) + \frac{z}{x+y+z}\gamma(C)$$

et

$$\Gamma(M) = -\frac{a^2yz + b^2zx + c^2xy}{(x+y+z)^2}.$$

Preuve. — En notant O et O' les centres des cercles Γ et γ,

$$(\gamma - \Gamma)(M) = O'M^2 - OM^2$$

ce qui montre que $\gamma - \Gamma$ est affine puisque c'est une fonction de Leibniz affine. Ainsi

$$(\gamma - \Gamma)(M) = \frac{x}{x+y+z}(\gamma - \Gamma)(A) + \frac{y}{x+y+z}(\gamma - \Gamma)(B) + \frac{z}{x+y+z}(\gamma - \Gamma)(C).$$

Comme $\Gamma(A) = \Gamma(B) = \Gamma(C) = 0$, on obtient la première formule.

Considèrons à présent la fonction de Leibniz $f : X \mapsto xXA^2 + yXB^2 + zXC^2$. D'une part $f(O) = (x+y+z)R^2$ puisque $OA = OB = OC = R$ et d'autre part d'après le théorème 2 $f(O) = f(M) + (x+y+z)OM^2$. Il en résulte

$$f(M) = (x+y+z)(R^2 - OM^2) = -(x+y+z)\Gamma(M), \text{ soit } \Gamma(M) = \frac{-f(M)}{x+y+z}.$$

Ce même théorème montre que $f(M) = \dfrac{xyAB^2 + yzBC^2 + zxCA^2}{x+y+z} = \dfrac{a^2yz + b^2zx + c^2xy}{x+y+z}$, d'où la formule annoncée sur $\Gamma(M)$. ∎

L'appartenance d'un point à un cercle γ se traduisant par $\gamma(M) = 0$, le théorème précédent montre donc que l'équation barycentrique du cercle γ est

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x+y+z)(ux + vy + wz) = 0$$

où $u = \gamma(A)$, $v = \gamma(B)$ et $w = \gamma(C)$. En particulier l'équation barycentrique du cercle circonscrit ABC est

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0.$$

5 Théorème. — *(i) L'équation barycentrique du cercle d'Euler est*

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - \frac{1}{4}(x+y+z)\left[(b^2+c^2-a^2)x + (c^2+a^2-b^2)y + (a^2+b^2-c^2)z\right] = 0.$$

(ii) L'équation barycentrique du cercle inscrit est

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - \frac{1}{4}(x+y+z)\left[(b+c-a)^2x + (c+a-b)^2y + (a+b-c)^2z\right] = 0.$$

Preuve. — (i) Le cercle d'Euler coupe (AB) en le milieu de $[AB]$ ainsi qu'en le pied C' de la hauteur issue de C. Par conséquent la puissance de A par rapport au cercle d'Euler est $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}(b^2+c^2-a^2)$.

(ii) La puissance de A par rapport au cercle inscrit est $(p-a)^2 = \frac{1}{4}(-a+b+c)^2$. ∎

6 Théorème. — *Les coordonnées barycentriques du point de Feuerbach sont*

$$(b-c)^2(b+c-a) : (c-a)^2(c+a-b) : (a-b)^2(a+b-c).$$

Preuve. — Les calculs dans le repère (A, B, C) sont peu commodes. On va se placer dans le repère (A', B', C') où A', B', C' sont les milieux de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. En désignant par $(x : y : z)$ les coordonnées d'un point M dans (A', B', C') et par $(x' : y' : z')$ dans (A, B, C) on peut écrire

$$\begin{aligned} x\overrightarrow{MA'} + y\overrightarrow{MB'} + z\overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{0} &\iff \frac{x}{2}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right) + \frac{y}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right) + \frac{z}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right) = \overrightarrow{0} \\ &\iff \frac{y+z}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{x+z}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{x+y}{2}\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

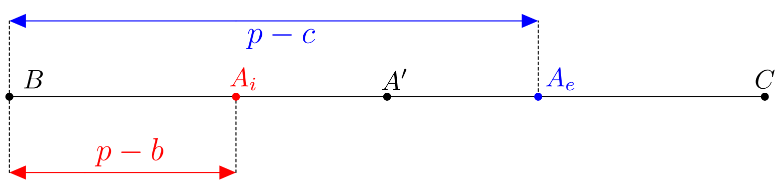
Les formules de changement de repère sont donc

$$x' = \frac{y+z}{2},\ y' = \frac{x+z}{2},\ z' = \frac{x+y}{2}.$$

Le triangle médial a pour côté la moitié de ceux de ABC, par conséquent l'équation du cercle circonscrit à $A'B'C'$ dans (A', B', C') est $\frac{a^2}{4}yz + \frac{b^2}{4}zx + \frac{c^2}{4}xy = 0$, soit simplement

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0.$$

Il est bien connu que les points de contact A_i du cercle inscrit et A_e du cercle A-exinscrit avec $[BC]$ sont symétriques par rapport à A' et que $BA_i = p-b$, $BA_e = p-c$. Il en résulte $\overrightarrow{A_iA'} = \frac{b-c}{2}\overrightarrow{BC}$, donc $A'A_i = \frac{|b-c|}{2}$ (voir [Sor87] pages 80-84) et par conséquent la puissance de A' par rapport au cercle inscrit est $\frac{1}{4}(b-c)^2$.



Le théorème 5 permet de conclure que l'équation du cercle inscrit dans (A', B', C') est

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x+y+z)\left[(b-c)^2x + (c-a)^2y + (a-b)^2z\right] = 0.$$

Il en résulte que les points d'intersection du cercle inscrit et du cercle d'Euler vérifient

$$\begin{cases} a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0 \\ (b-c)^2x + (c-a)^2y + (a-b)^2z = 0 \end{cases}$$

En multipliant la première équation par $(b-c)^2$ puis en remplaçant $(b-c)^2x$ par la valeur $-[(c-a)^2y+(a-b)^2z]$ tirée de la deuxième équation, il vient

$$a^2(b-c)^2yz - \left[(c-a)^2y+(a-b)^2z\right]\left(b^2z+c^2y\right) = 0$$

En réordonnant,

$$c^2(c-a)^2y^2 + \left[b^2(c-a)^2 + c^2(a-b)^2 - a^2(b-c)^2\right]yz + b^2(a-b)^2z^2 = 0.$$

Simplifions le crochet

$$\begin{aligned} b^2(c-a)^2 + c^2(a-b)^2 - a^2(b-c)^2 &= b^2(c-a)^2 + c^2a^2 - 2abc^2 + bc^2 - a^2b^2 + 2a^2bc - a^2c^2 \\ &= b^2(c-a)^2 + 2abc(a-c) + b^2(c^2-a^2) = (c-a)\left[b^2(c-a) - 2abc + b^2(c+a)\right] \\ &= (c-a)(2b^2c - 2abc) = 2bc(b-a)(c-a). \end{aligned}$$

L'équation se factorise alors en

$$[(c(c-a)y - b(a-b)z]^2 = 0.$$

d'où $y : z = b(a-b) : c(c-a)$. Par permutation circulaire on a également

$$x : z = a(a-b) : c(b-c) \text{ et } x : y = a(c-a) : b(b-c)$$

si bien que les coordonnées du point dans le repère (A', B', C') sont

$$x : y : z = a(a-c)(a-b) : b(b-a)(b-c) : c(c-a)(c-b).$$

Il reste à revenir au repère (A, B, C). On a $x' = \dfrac{y+z}{2}$. Or

$$\begin{aligned} y + z = b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b) &= (b-c)(b^2 - ab - c^2 + ac) \\ &= (b-c)\left[b^2 - c^2 - a(b-c)\right] = (b-c)^2(b+c-a), \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ■

7 Remarque. — On peut obtenir l'équation du cercle inscrit dans le repère (A', B', C') à partir de celle dans le repère (A, B, C) qui est, d'après le théorème 5,

$$a^2y'z' + b^2z'x' + c^2x'y' - \frac{1}{4}(x'+y'+z')\left[(b+c-a)^2x' + (c+a-b)^2y' + (a+b-c)^2z'\right] = 0.$$

Le changement de variables donne en chassant les facteurs,

$$\begin{aligned} &a^2(x+z)(x+y) + b^2(y+z)(y+x) + c^2(z+y)(z+x) \\ &\qquad - \frac{1}{2}(x+y+z)\left[(b+c-a)^2(y+z) + (c+a-b)^2(x+z) + (a+b-c)^2(x+y)\right] = 0 \end{aligned}$$

D'une part $a^2(x+z)(x+y) = a^2yz + a^2x(x+y+z)$ (et permutés cycliques) et d'autre part le coefficient de x dans le crochet est

$$(c+a-b)^2 + (a+b-c)^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 4bc = 2(b-c)^2 + 2a^2.$$

Par suite l'équation se réécrit

$$\begin{aligned} &a^2yz + b^2zx + c^2xy + (x+y+z)(a^2x + b^2y + c^2z) \\ &\qquad - (x+y+z)\left[\left((b-c)^2 + a^2\right)x + \left((c-a)^2 + b^2\right)y + \left((a-b)^2 + c^2\right)z\right] = 0 \end{aligned}$$

d'où finalement

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x+y+z)\left[(b-c)^2x + (c-a)^2y + (a-b)^2z\right] = 0.$$

1.3 Distance entre deux points

8 Théorème. — *Soit* $P\left(x:y:z\right)$ *et* $P'\left(x':y':z'\right)$*, alors*

$$PP'^2=\frac{\left(Y-Z\right)^2S_A+\left(Z-X\right)^2S_B+\left(X-Y\right)^2S_C}{\left(x+y+z\right)^2\left(x'+y'+z'\right)^2}$$

avec

$$X=yz'-zy',Y=zx'-xz',Z=xy'-yx'.$$

Preuve. — Supposons dans un premier temps que les coordonnées sont normalisées, c'est-à-dire telles que $x+y+z=x'+y'+z'=1$. On a alors

$$\overrightarrow{PP'}=\left(y'-y\right)\overrightarrow{AB}+\left(z'-z\right)\overrightarrow{AC}$$

On en déduit, puisque $S_A+S_B=c^2$ et $S_A+S_C=b^2$,

$$PP'^2=\left(S_A+S_B\right)\left(y'-y\right)^2+\left(S_A+S_C\right)\left(z'-z\right)^2+2S_A\left(y'-y\right)\left(z'-z\right).$$

Le coefficient de S_A est

$$\left(y'-y\right)^2+\left(z'-z\right)^2+2\left(y'-y\right)\left(z'-z\right)=\left(y'+z'-y'-z'\right)^2=\left(x'-x\right)^2,$$

ainsi $PP'^2=S_A\left(x'-x\right)^2+S_B\left(y'-y\right)^2+S_C\left(z'-z\right)^2$.

Pour le cas général, il suffit de diviser x,y,z par $x+y+z$ et x',y',z' par $x'+y'+z'$ dans la relation précédente. ∎

2 Extraversion

Il s'agit ici de formaliser l'idée développée par Émile Lemoine sous le nom de « transformation continue » dans [Lem91]. Le texte est emprunté à poulbot sur le forum les-mathematiques.net.

On trouvera la notion de notion de centres triangulaires développée dans [Kim98], p. 44 et suivantes.

9 Définition. — *On appelle centre triangulaire tout point de coordonnées barycentriques par rapport à* A,B,C *de la forme*

$$f\left(a,b,c\right):f\left(b,c,a\right):f\left(c,a,b\right)$$

où f *est un polynôme homogène vérifiant*

$$f\left(a,c,b\right)=f\left(a,b,c\right).$$

Parmi ces centres triangulaires, on en distingue de deux types :

- les centres « forts » pour lesquels $f\left(-a,b,c\right)=f\left(a,b,c\right)$ (par exemple G,O,H) ;
- les autres, dits centres « faibles » (par exemple I, le point de Gergonne, le point de Nagel).

À un centre M du deuxième type, on peut associer ses trois extraversions M_a de coordonnées

$$f\left(-a,b,c\right):f\left(b,c,-a\right):f\left(c,-a,b\right)$$

et M_b, M_c obtenus par permutation circulaire. Pour un point fort, on aura évidemment $M_a=M_b=M_c=M$.

La distance entre les points $P\,(x:y:z)$ et $P'\,(x':y':z')$ est d'après le théorème 8,

$$PP'^2 = \frac{(Y-Z)^2\,S_A + (Z-X)^2\,S_B + (X-Y)^2\,S_C}{(x+y+z)^2\,(x'+y'+z')^2}$$

où $X = yz' - zy', Y = zx' - xz', Z = xy' - yx'$. Par conséquent si dans le carré de la distance de deux centres triangulaires, on remplace a par $-a$, on obtient le carré de la distance de leurs A-extraversions.

Voici les principales transformations que l'on doit effectuer par A-extraversion.

On remplace	a	b	c	p	$p-a$	$p-b$	$p-c$	S	R	r	r_a	r_b	r_c
par	$-a$	b	c	$p-a$	p	$-(p-c)$	$-(p-b)$	S	$-R$	r_a	r	$-r_c$	$-r_b$

On remplace	$\cos A$	$\cos B$	$\cos C$	$\sin A$	$\sin B$	$\sin C$
par	$\cos A$	$-\cos B$	$-\cos C$	$\sin A$	$-\sin B$	$-\sin C$

Preuve. — En remplaçant a par $-a$ dans p on obtient $\dfrac{-a+b+c}{2} = \dfrac{2p-2a}{2} = p-a$. Dans $p-a$ on obtient $\dfrac{-a+b+c}{2} - (-a) = \dfrac{a+b+c}{2} = p$, puis dans $p-b$ on a $\dfrac{-a+b+c}{2} - b = \dfrac{-a-b+c}{2} = -(p-c)$. C'est analogue pour $p-c$.
Comme $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, la transformation laisse S invariant. Les formules $r = \dfrac{S}{p}$ et $r_a = \dfrac{S}{p-a}$ permettent de déterminer les transformés de r, r_a, r_b et r_c.
Enfin concernant les cosinus et sinus, il suffit d'utiliser les formules $\cos A = \dfrac{S_a}{bc}$, $\sin A = \dfrac{a}{2R}$. ■

3 Calcul de distances

10 Formule. — *$ab+ac+bc = p^2+r^2+4Rr$ et $a^2+b^2+c^2 = 2p^2-2r^2-8Rr$*

Preuve. — En développant l'égalité $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ il vient

$$S^2 = p\left[p^3 - (a+b+c)p^2 + (ab+ac+bc)p - abc\right]$$

Or $a+b+c = 2p$ donc $S^2 = p\left[-p^3 - (ab+ac+bc)p - abc\right]$ puis en divisant par p^2 et en utilisant $r = \dfrac{S}{p}$,

$$r^2 = -p^2 + (ab+ac+bc) - \frac{abc}{p}.$$

De $4RS = abc$, on déduit $4Rrp = abc$ d'où $r^2 = -p^2 + (ab+ac+bc) - 4Rr$, ce qui est la première formule. Remarquons que $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc)$ ce qui donne finalement la relation $a^2+b^2+c^2 = 4p^2 - 2(p^2+r^2+4Rr) = 2p^2-2r^2-8Rr$. ■

11 Lemme. — *Pour tout point X,*

$$\sum XA^2 = 3XG^2 + \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) \text{ et } \sum aXA^2 = (a+b+c)XI^2 + abc.$$

Preuve. — Puisque $G(1,1,1)$, la relation de Leibniz donne immédiatement la première formule. La seconde résulte du fait que $I(a,b,c)$ et que le numérateur de h se factorise alors en $abc(a+b+c)$. ■

12 Formule. — *Dans tout triangle, on dispose des relations*

(i) $OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$ *;*

(ii) $OH^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2)$ *;*

(iii) $OI^2 = R^2 - \dfrac{abc}{a+b+c}$.

Preuve. — (i) Puisque $OA = R$, la première formule du lemme 11 avec $X = O$ donne

$$3R^2 = 3OG^2 + \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

(ii) Pour la seconde on utilise la relation $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ qui implique $OH^2 = 9OG^2$.

(iii) En faisant $X = O$ dans la deuxième formule du lemme 11 on obtient

$$(a+b+c)R^2 = (a+b+c)OI^2 + abc,$$

ce qui est le résultat souhaité pour OI^2. ■

13 Théorème (Formule d'Euler). — *On a* $OI^2 = R^2 - 2Rr$ *et* $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$.

Preuve. — D'après ce qui précède $OI^2 = R^2 - \dfrac{abc}{a+b+c}$. Mais il est bien connu que $abc = 4RS$ et $pr = S$. Il vient donc $abc = 4Rpr = 2(a+b+c)Rr$ puis $\dfrac{abc}{a+b+c} = 2Rr$, ce qui donne $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Pour OI_a^2 on raisonne par A-extraversion : R, r, O, I deviennent respectivement $-R, r_a, O, I_a$. ■

14 Formule. — *En notant* ω *le centre du cercle d'Euler on a*

(i) $IG^2 = r^2 - \frac{1}{3}p^2 + \frac{2}{9}(a^2+b^2+c^2) = \frac{1}{9}(p^2+5r^2-16Rr)$ *;*

(ii) $IH^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2$ *;*

(iii) $I\omega = \dfrac{R}{2} - r$ *et* $I_a\omega = \dfrac{R}{2} + r_a$.

Preuve. — La formule 1 du lemme 11 avec $X = I$ montre que $\sum IA^2 = 3IG^2 + \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$. On sait que la distance entre A et le point de tangence de (I,r) avec $[AB]$ est $p-a$, donc $IA^2 = r^2 + (p-a)^2$ d'après le théorème de Pythagore. Par conséquent

$$3r^2 + \sum (p-a)^2 = 3IG^2 + \frac{1}{3}\sum a^2$$

En développant le carré dans la somme

$$\sum (p-a)^2 = 3p^2 - 2p(a+b+c) + \sum a^2 = 3p^2 - (2p)^2 + \sum a^2 = -p^2 + \sum a^2.$$

On en déduit finalement

$$3IG^2 = 3r^2 - p^2 + \sum a^2 - \frac{1}{3}\sum a^2 = 3r^2 - p^2 + \frac{2}{3}\sum a^2$$

ce qui est la première formule donnant IG^2. La seconde s'obtient grâce à l'égalité $a^2+b^2+c^2 = 2p^2-2r^2-8Rr$ démontrée dans les préliminaires :

$$IG^2 = \frac{1}{9}\left(9r^2-3p^2+2\sum a^2\right) = \frac{1}{9}(9r^2-3p^2+4p^2-4r^2-16Rr) = \frac{1}{9}(p^2+5r^2-16Rr).$$

Comme $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$, le point H est barycentre de $(G,3),(O,-2)$. La formule de Leibniz donne

$$3IG^2-2IO^2 = IH^2-6OG^2$$

d'où

$$\begin{aligned} IH^2 &= 3IG^2-2IO^2+6OG^2 \\ &= 3r^2-p^2+\frac{2}{3}\sum a^2-2(R^2-2Rr)+6\left(R^2-\frac{1}{9}\sum a^2\right) \\ &= 3r^2-p^2+4R^2+4Rr. \end{aligned}$$

Enfin ω étant le milieu de $[OH]$, la formule de Leibniz (qui n'est autre de la formule de la médiane dans ce cas) donne $IO^2+IH^2 = 2I\omega^2+\frac{1}{2}OH^2$, d'où

$$\begin{aligned} 2I\omega^2 &= IO^2+IH^2-\frac{1}{2}OH^2 \\ &= (R^2-2Rr)+(4R^2+4Rr+3r^2-p^2)-\frac{1}{2}\left(9R^2-\sum a^2\right) \\ &= \frac{R^2}{2}+2Rr+3r^2-p^2+\frac{1}{2}\left(2p^2-2r^2-8Rr\right) \\ &= \frac{R^2}{2}-2Rr+2r^2 \end{aligned}$$

donc $I\omega^2 = \dfrac{R^2}{4}-Rr+r^2 = \left(\dfrac{R}{2}-r\right)^2$. Mais le théorème d'Euler $OI^2 = R^2-2Rr = R(R-2r)$ implique $R-2r \geqslant 0$, donc $I\omega = \dfrac{R}{2}-r$.
Comme ω est un centre fort (voir théorème 3), par A-extraversion, I, ω, R et r deviennent respectivement I_a, ω, $-R$ et r_a, si bien que $I_a\omega^2 = \dfrac{R^2}{4}+Rr_a+r_a^2 = \left(\dfrac{R}{2}+r_a\right)^2$ et donc la relation attendue. ■

Applications

15 Théorème (de Feuerbach). — *Le cercle d'Euler est tangent intérieurement au cercle inscrit et extérieurement aux cercles exinscrits.*

Preuve. — Puisque $I\omega = \dfrac{R}{2}-r$ et que le rayon du cercle d'Euler est $\dfrac{R}{2}$, on en déduit que (I,r) est tangent intérieurement à $\left(\omega, \dfrac{R}{2}\right)$. L'égalité $I_a\omega = \dfrac{R}{2}+r_a$ montre que (I_a,r_a) est tangent extérieurement au cercle d'Euler. ■

Voyons maintenant un problème de lieu, résolu par poulbot sur le forum les-mathematiques.net.

16 Théorème. — *Soit (I,r) un cercle et H un point. Le lieu des sommets des triangles ABC ayant (I,r) comme cercle inscrit ou exinscrit et H comme orthocentre est une ellipse, une hyperbole ou une parabole selon que H est intérieur, extérieur ou situé sur le cercle (I,r).*

Preuve. — Par les formules 10, 12 et 14, la puissance de H par rapport au cercle circonscrit est

$$\begin{aligned}OH^2 - R^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2) - R^2 = 8R^2 - (2p^2 - r^2 - 8Rr)\\ = 2(4R^2 + 4Rr - p^2 + 3r^2) - 4r^2 = 2IH^2 - 4r^2.\end{aligned}$$

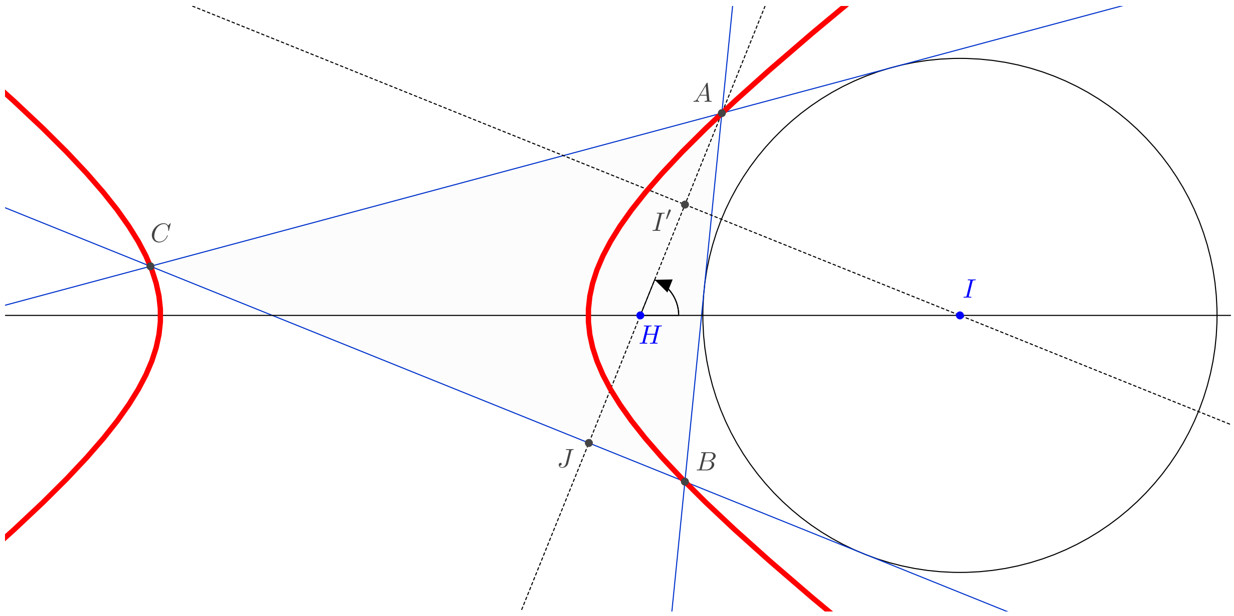
D'autre part la hauteur AH recoupe le cercle circonscrit au symétrique de H par rapport à BC, donc cette puissance est aussi égale à $2\overline{HA}\cdot\overline{HJ}$. Considérons un système de coordonnées polaires (ρ, θ) d'un des sommets (A par exemple) de ABC par rapport à l'axe polaire (HI) orienté par $\overrightarrow{HI}$ et de pôle H. Soit I' le projeté orthogonal de I sur la hauteur (AH). On a

$$\overline{HJ} = \overline{HI'} + \overline{I'J} = HI\cos\rho + r$$

En posant $d = HI$, on déduit des deux expressions de la puissance l'égalité

$$\rho = \frac{d^2 - 2r^2}{r + d\cos\theta}.$$

On obtient donc une conique de foyer H, d'axe focal HI et excentricité $e = \dfrac{d}{r}$ ∎



4 Trigonométrie

17 Formule. — $\sum \sin A = 4\prod \cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{p}{R}$.

Preuve. — On a en effet

$$\begin{aligned}\sin A + \sin B + \sin C &= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin C = 2\sin\frac{\pi - C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin C\\ &= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right]\\ &= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right] = 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}.\end{aligned}$$

Cela montre que dans un triangle non plat $\sum \sin A \neq 0$ et la loi des sinus permet d'écrire

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sum \sin A} = \frac{2p}{\sum \sin A} = 2R$$

d'où $\sum \sin A = \dfrac{p}{R}$. ∎

18 Formule. — $\sum \cos A = 1 + 4 \prod \sin \dfrac{A}{2} = 1 + \dfrac{r}{R}$.

Preuve. — On a en effet

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B + \cos C &= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos C = 2\cos\frac{\pi - C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos C\\ &= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} = 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right]\\ &= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right] = 1 + 4\sin\frac{C}{2}\left[-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{-B}{2}\right],\end{aligned}$$

ce qui est la première égalité. Pour la seconde, multiplions membre à membre les égalités de la loi des sinus. On obtient $\dfrac{abc}{\prod \sin A} = (2R)^3$ d'où avec avec la formule $\sin x = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$,

$$\frac{abc}{8\prod \sin\frac{A}{2}\prod\cos\frac{A}{2}} = 8R^3$$

Mais comme $abc = 4RS$ et $S = rp$, on a $abc = 4Rpr$ et puisque $\prod \cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{p}{4R}$ (formule 17), il vient

$$\prod \sin\frac{A}{2} = \frac{abc}{64R^3\prod\cos\frac{A}{2}} = \frac{4Rpr}{64R^3} \times \frac{4R}{p} = \frac{r}{4R}.$$

Il en résulte bien $\sum \cos A = 1 + \dfrac{r}{R}$. ∎

19 Formule. — $2\prod \cos A = 1 - \sum \cos^2 A = \sum \sin^2 A - 2$.

Preuve. — Transformons les produits en sommes.

$$\begin{aligned}2\cos A\cos B\cos C &= [\cos(A-B) + \cos(A+B)]\cos C = [\cos(A-B) - \cos(C)]\cos C\\ &= \cos(A-B)\cos C - \cos^2 C = \frac{1}{2}[\cos(A-B-C) + \cos(A-B+C)] - \cos^2 C\\ &= \frac{1}{2}\cos(2A-\pi) + \frac{1}{2}\cos(\pi - 2B) - \cos^2 C = -\frac{1}{2}\cos 2A - \frac{1}{2}\cos 2B - \cos^2 C.\end{aligned}$$

Pour la première égalité, on utilise la formule de duplication $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$,

$$2\cos A\cos B\cos C = -\frac{1}{2}(2\cos^2 A - 1) - \frac{1}{2}(2\cos^2 B - 1) - \cos^2 C = 1 - \sum \cos^2 A.$$

La seconde s'obtient en remplaçant $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$. ∎

20 Théorème. — *L'équation suivante admet* $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ *comme racines*

$$4R^2x^3 - 4R(R+r)x^2 + \left(p^2 + r^2 - 4R^2\right)x + (2R+r)^2 - p^2 = 0$$

Preuve. — Calculons les fonctions élémentaires des racines $\sigma_1 = \prod \cos A$, $\sigma_2 = \sum \cos A \cos B$ et $\sigma_3 = \sum \cos A$.

- On sait d'après la formule 18 que $\sigma_3 = \dfrac{R+r}{R}$.
- En utilisant la formule 19 et la loi des sinus $\sin A = \dfrac{a}{2R}$, on a

$$2\sigma_1 = 2\prod \cos A = \sum \sin^2 A - 2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2} - 2$$

  Mais comme $a^2+b^2+c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$ (formule 10), il vient

$$2\sigma_1 = \frac{2p^2 - 2r^2 - 8Rr - 8R^2}{4R^2} = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr - 4R^2}{2R^2} = \frac{p^2 - (2R+r)^2}{2R^2}.$$

- On a l'identité algébrique $2\sigma_2 = (\sigma_3)^2 - \sum \cos^2 A$. La formule 19 montre que $\sum \cos^2 A = 1 - 2\sigma_1$ si bien que les calculs de σ_1 et σ_3 qui précède conduisent à

$$2\sigma_2 = (\sigma_3)^2 + 2\sigma_1 - 1 = \frac{2(R+r)^2 + p^2 - (2R+r)^2 - 2R^2}{2R^2} = \frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{2R^2}.$$

Les réels $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ sont racines de l'équation $x^3 - \sigma_3 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_1 = 0$, c'est bien celle de l'énoncé après multiplication par $4R^2$ pour chasser les dénominateurs. ■

Applications

Voici une belle application de ce théorème, démontré par poulbot sur les-mathematiques.net.

21 Théorème. — *Dans tout triangle*

$$IO^2 - IH^2 = R^2\left(2\cos A - 1\right)\left(2\cos B - 1\right)\left(2\cos C - 1\right).$$

Preuve. — D'après la formule 14 et la formule d'Euler, on a

$$IO^2 - IH^2 = R^2 - 2Rr - (4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2) = p^2 - 3(R+r)^2.$$

Mais les réels $2\cos A - 1$, $2\cos B - 1$ et $2\cos C - 1$ sont les solutions de l'équation du théorème 20 dans lequel on remplace x par $\dfrac{x+1}{2}$. Le terme dominant de cette équation est $\dfrac{R^2}{2}$ et le terme constant est

$$\frac{1}{8}4R^2 - \frac{1}{4}4R(R+r) + \frac{1}{2}(p^2 + r^2 - 4R^2) + (2R+r)^2 - p^2 = \frac{3(R+r)^2 - p^2}{2}$$

Le produit $\left(2\cos A - 1\right)\left(2\cos B - 1\right)\left(2\cos C - 1\right)$ des racines est donc égal $\dfrac{IO^2 - IH^2}{R^2}$, ce qui démontre le théorème. ■

Il en résulte que l'égalité $IO = IH$ a lieu si et seulement si l'un des angles du triangle ABC vaut $60°$.

Par A-extraversion I, O, H, $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ deviennent respectivement I_a, O, H, $\cos A$, $-\cos B$, $-\cos C$ d'où

$$I_aO^2 - I_aH^2 = R^2\left(2\cos A - 1\right)\left(2\cos B + 1\right)\left(2\cos C + 1\right).$$

Références

[Kim98] Clark Kimberling, *Triangle centers and central triangles.* Congressus numerantium vol. 129 (1998).

[Lem91] Émile Lemoine, *Sur la transformation continue.* Bulletin de la SMF, tome 19 (1891), p. 136-141.

[Sor87] René et Yvonne Sortais, *La géométrie du triangle.* Hermann (1987).