Corollaire 2. — *Soient* $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota \in I}$ *une famille de cardinaux, et* $\mathfrak{b}$ *un cardinal; on a*

$$\Big(\prod_{\iota \in I} \mathfrak{a}_\iota\Big)^{\mathfrak{b}} = \prod_{\iota \in I} \mathfrak{a}_\iota^{\mathfrak{b}}.$$

En effet, posons $\mathfrak{a}_{\iota\beta} = \mathfrak{a}_\iota$ pour tout couple $(\iota, \beta) \in I \times \mathfrak{b}$. On a alors, en vertu de l'associativité du produit

$$\Big(\prod_{\iota \in I} \mathfrak{a}_\iota\Big)^{\mathfrak{b}} = \prod_{\beta \in \mathfrak{b}} \Big(\prod_{\iota \in I} \mathfrak{a}_{\iota\beta}\Big) = \prod_{\iota \in I} \Big(\prod_{\beta \in \mathfrak{b}} \mathfrak{a}_{\iota\beta}\Big) = \prod_{\iota \in I} \mathfrak{a}_\iota^{\mathfrak{b}}.$$

Corollaire 3. — *Soient* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *des cardinaux; on a* $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = (\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}}$.

En effet, posons $\mathfrak{b}_\gamma = \mathfrak{b}$ pour tout $\gamma \in \mathfrak{c}$. On a

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\sum_{\gamma \in \mathfrak{c}} \mathfrak{b}_\gamma} = \prod_{\gamma \in \mathfrak{c}} \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}_\gamma} = (\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}},$$

en vertu du cor. 1.

Proposition 11. — *Soit* $\mathfrak{a}$ *un cardinal. On a* $\mathfrak{a}^0 = 1$, $\mathfrak{a}^1 = \mathfrak{a}$, $1^{\mathfrak{a}} = 1$; *si* $\mathfrak{a} \neq 0$, *on a* $0^{\mathfrak{a}} = 0$.

En effet, il existe une application et une seule de $\varnothing$ dans un ensemble quelconque (l'application de graphe vide); l'ensemble des applications d'un ensemble à un seul élément dans un ensemble quelconque X est équipotent à X (II, p. 32); il existe une application et une seule d'un ensemble quelconque dans un ensemble à un élément; enfin, il n'existe aucune application d'un ensemble non vide dans $\varnothing$.

On notera en particulier que l'on a $0^0 = 1$.

Proposition 12. — *Soient* X *un ensemble et* $\mathfrak{a}$ *son cardinal; le cardinal de l'ensemble* $\mathfrak{P}(X)$ *des parties de* X *est* $2^{\mathfrak{a}}$.

Soient α et β les éléments du cardinal 2; pour toute partie Y de X, soit f_Y l'application de X dans 2, définie par $f_Y(x) = \alpha$ pour $x \in Y$ et $f_Y(x) = \beta$ pour $x \in X - Y$; soit u l'application $Y \mapsto f_Y$ de $\mathfrak{P}(X)$ dans 2^X. Inversement, à toute application g de X dans 2, faisons correspondre la partie $\overset{-1}{g}(\alpha)$ de X, et soit v l'application $g \mapsto \overset{-1}{g}(\alpha)$ de 2^X dans $\mathfrak{P}(X)$. Il est clair que les applications $u \circ v$ et $v \circ u$ sont les applications identiques de 2^X et de $\mathfrak{P}(X)$. Donc u et v sont des bijections (II, p. 18, corollaire), ce qui montre que $\mathrm{Card}\,(\mathfrak{P}(X)) = 2^{\mathfrak{a}}$.

6. Relation d'ordre et opérations entre cardinaux

Proposition 13. — *Soient* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *des cardinaux; pour que l'on ait* $\mathfrak{a} \geqslant \mathfrak{b}$, *il faut et il suffit qu'il existe un cardinal* $\mathfrak{c}$ *tel que* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$.

En effet, la relation $\mathfrak{a} \geqslant \mathfrak{b}$ signifie qu'il existe une partie B de $\mathfrak{a}$ équipotente à $\mathfrak{b}$ (III, p. 24), c'est-à-dire que $\mathfrak{a}$ est équipotent à l'ensemble somme de $\mathfrak{b}$ et d'un ensemble C.