LE TRIVIUM MATHÉMATIQUE D'ARNOLD

Jean-Yves Degos

Table des matières

Chapitre 1

Trivium mathématique

Le niveau de la culture mathématique baisse. Les étudiants de tous niveaux sortant de nos universités, y compris du département de mathématique et de mécanique de l'université d'état de Moscou, deviennent aussi ignorants que leurs enseignants.

Quelle est la raison de ce phénomène anormal? Dans des conditions normales, les étudiants connaissent mieux leur sujet que leurs professeurs, en application du principe général de diffusion de la connaissance : la nouveauté ne triomphe pas parce que des vieillards l'enseignent, mais parce qu'arrivent de nouvelles générations qui la connaissent.

Parmi les causes de cette situation anormale, je voudrais mettre en évidence celle dont nous sommes nous-mêmes responsables, afin que nous essayions de corriger ce qui est en notre pouvoir. Une des causes est, je crois, notre système d'examens, spécialement destiné à la fabrication de rebut, c'est-à-dire de pseudo-élèves qui apprennent les mathématiques comme le marxisme : ils potassent des formules et apprennent par coeur des réponses aux questions les plus fréquemment posées au examens.

Comment peut-on mesurer le niveau d'entraînement d'un mathématicien? Ni par la liste, ni par les programmes des cours suivis. La seule façon de déterminer ce que nous avons effectivement appris à nos étudiants est de faire une liste des problèmes qu'ils devraient savoir résoudre à la suite de notre enseignement.

Je ne parle pas de problèmes difficiles, mais de questions qui forment le strict minimum essentiel. Il ne doit pas y avoir beaucoup de problèmes, mais nous devons exiger que les étudiants sachent les résoudre. I. E. Tamm[1] racontait que, tombé entre les maines des bandits pendant la guerre civile, il répondit pendant un interrogatoire qu'il avait étudié à la faculté de mathématique et de physique. Il eut la vie sauve parce qu'il sut résoudre un exercice de la théorie des séries qu'on lui avait posé pour vérifier ses dires. Nos étudiants devraient être préparés à de telles épreuves.

[1]Un des grands physiciens théoriciens russes et un des pères de la bombe H.

Partout dans le monde, un examen mathématique consiste à résoudre des problèmes par écrit. Le caractère écrit de l'épreuve est partout un signe de démocratie aussi nécessaire que des élections pluralistes. En fait dans un examen oral, un étudiant est absolument sans défense. Pendant que je faisais passer des examens pour la chaire d'équations différentielles de la faculté de mathématiques et de mécanique de l'université de Moscou, j'ai entendu des examinateurs, à la table voisine, coller des étudiants qui donnaient des réponses irréprochables (dépassant peut-être le niveau de compréhension de l'enseignant). On connaît aussi des cas où on a collé l'étudiant exprès (on pouvait sauver la situation en entrant dans la salle).

Un travail écrit est un document, et un examinateur est forcément plus objectif (en particulier si la copie est anonyme comme elle devrait l'être).

Les examens écrits ont encore un avantage qui n'est pas sans importance : on peut conserver les sujets pour les publier ou les donner aux étudiants pour préparer l'examen de l'année suivante. En plus, ces sujets déterminent le niveau du cours et celui du professeur qui les a composés. Ses points forts et ses points faibles s'y voient d'emblée, et les spécialistes peuvent immédiatement évaluer à la fois l'enseignant, ce qu'il souhaite enseigner aux étudiants et ce qu'il a réussi à leur apprendre.

À propos, en France, les sujets du concours général, communs au pays tout entier et plus ou moins équivalents à nos Olympiades sont composés par des professeurs qui envoient leurs problèmes à Paris, où l'on choisit les meilleurs. Le Ministère a ainsi des données objectives sur le niveau des professeurs en comparant d'abord l'ensemble des problèmes et ensuite les résultats des élèves. Chez nous, cependant, les professeurs sont évalués, comme vous le savez, sur des critères tels que leur apparence extérieure, vitesse de parole et correction idéologique.

Il n'est pas étonnant que les autrs pays ne veuillent pas reconnaître nos diplômes (je pense que dans l'avenir, ça s'étendra même aux diplômes mathématiques). Des évaluations obtenues par des examens oraux dont ne garde aucune trace ne peuvent se comparer objectivement à quoi que ce soit d'autre et ont un poids extrêmement vague et relatif, dépendant complètement du niveau réel de l'enseignement et des questions dans tel ou tel département. Avec le même programme est les mêmes notes, la connaissance et les capacités d'un étudiant peuvent varier (dans un certain sens) d'un facteur 10. En plus, il est bien plus facile de falsifier un examen oral ; c'est même arrivé chez nous, à la faculté de mathématiques et de mécanique de l'université Lomonossov de Moscou, où un professeur aveugle a été obligé de donner une bonne note à un étudiant dont la réponse était très proche du manuel, et qui n'avait pas su résoudre un seul problème.

L'essence et les insuffisances de notre système d'éducation mathématique mathématique ont été décrits brillament par Richard Feynman dans ses mémoires (Surely you are joking , Mr Feynman (Norton, New York, 1984) dans le chapitre sur l'enseignement de la physique au Brésil).

Dans les termes de Feynman, ces étudiants ne comprennent rien, mais ne posent jamais de questions, ce qui fait qu'ils ont l'air de tout comprendre. Si quelqu'un commence à poser des questions, il est rapidement remis à sa place, puisqu'il fait perdre leur temps à l'orateur qui lit sa conférence et aux étudiant qui la copient. Le résultat est nul n'est capable d'appliquer l'enseignement à un seul exemple. Les examens aussi (dogmatiques comme les nôtres : énoncez la définition, énoncez le théorème) sont toujours passés avec succès. Les étudiants atteignent un état de pseudo-éducation auto-propagée et peuvent enseigner de la même façon aux générations suivantes. Mais toute cette activité n'a aucun sens et en fait, notre production de spécialistes est, de façon significative, une fraude, une illusion et une tricherie : ces soi-disant spécialistes ne sont pas caprables de résoudre les problèmes les plus simples et ne possèdent pas les rudiments de leur art.

Ainsi, *pour mettre fin à cette tricherie, il nous faut spécifier, non pas une liste de théorèmes, mais une collection de problèmes que les étudiants devraient savoir résoudre. Ces listes de problèmes doivent être publiées chaque année (je pense qu'il devrait y avoir 10 problèmes pour chaque cours semestriel).* Ainsi nous verrons ce que nous apprenons réellement aux étudiants et à quel point nous avons réussi. Pour que les étudiants apprennent à appliquer leurs connaissances, *tous les examens doivent être écrits.*

Naturellement, les problèmes varieront d'un département à l'autre et d'année en année. Ainsi on pourra comparer le niveau des différents enseignants et la production des différentes années. Un étudiant qui met plus de cinq minutes à calculer la moyenne de $\sin^{100} x$ avec une précision de 10% n'a aucune maîtrise des mathématiques, même s'il a étudié l'analyse non standard, l'algèbre universelle, les super-variétés ou les théorèmes de plongements.

La fabrication de problèmes-types est un gros travail, mais je pense qu'il faut le faire. À titre d'essai, je donne ci-dessous une liste ce cent problèmes formant un minimum mathématique pour un étudiant en physique. Les problèmes-types (contrairement aux programmes) ne pas uniquement définis, et beaucoup seront probablement en désaccord avec moi. Cependant je crois qu'il est nécessaire de commencer à déterminer le niveau mathématique au moyen d'examens écrits et de problèmes-types. On peut espérer que dans l'avenir on donnera aux étudiants les problèmes-types de chaque cours au début du semestre et que les examens oraux où les étudiants récitent par cœur deviendront une chose du passé.

Vladimir Igorevitch Arnold,

le 19 octobre 2002.

Chapitre 2

Liste des problèmes

1. Dessiner le graphe de la dérivée et le graphe de l'intégrale d'une fonction donnée par son graphe.

2. Trouver la limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\tan x - \tan\sin x}{\arcsin\arctan x - \arctan\arcsin x}\,.$$

3. Trouver les valeurs critiques et les points critiques de l'application $z \mapsto z^2 + \overline{z}$ (dessiner la réponse).

4. Calculer la centième dérivée de la fonction
$$\frac{x^2+1}{x^3-x}\,.$$

5. Calculer à 10% près la dérivée de la fonction
$$\frac{1}{x^2+3x+2}$$
à l'origine.

6. Dans le plan des (x, y) dessiner la courbe donnée par les équations paramétriques
$$x = 2t - 4t^3 \text{ et } y = t^2 - 3t^4\,.$$

7. Combien de normales peut-on mener d'un point du plan à une ellipse? Trouver la région où ce nombre de normales est maximal.

8. Combien la fonction $x^4+y^4+z^4+u^4+v^4$ possède-t-elle de maxima, minima, cols sur la surface
$$x + \cdots + v = a\,,\ x^2 + \cdots + v^2 = b\,,\ x^3 + \cdots v^3 = c\,?$$

9. Tout polynôme positif de deux variables réelles atteint-il sa borne inférieure dans le plan?

10. Étudier le comportement asymptotique des solutions y de l'équation $x^5 + x^2y^2 = y^6$ qui tendent vers 0 quand $x \to 0$.

11. Étudier la convergence de l'intégrale
$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dydy}{1 + x^4y^4}\,.$$

12. Trouver le flux du champ de vecteurs $\vec{r}/r^3$ à travers la surface
$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 2\,.$$

13. Calculer à 5% près
$$\int_1^{10} x^x dx\,.$$

14. Calculer avec une erreur relative inférieure à 10%
$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x^4 + 4x + 4)^{-100} dx\,.$$

15. Calculer à 10% près
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(100(x^4 - x))dx\,.$$

16. Quelle fraction du volume d'un cube de dimension 5 le volume de la sphère inscrite représente-t-il? Même question avec un cube de dimension 10.

17. Trouver à 10% près la distance du centre de gravité d'une demi-sphère solide de dimension 100 et de rayon 1 au centre de la sphère.

18. Calculer
$$\int \exp\left(-\sum_{1\le i\le j\le n} x_i x_j\right) dx_1 \ldots dx_n\,.$$

19. Déterminer la trajectoire d'un rayon lumineux dans un milieu d'indice de réfraction $n(y) = y^4 - y + 1$, en utilisant la loi de Snell $n(y)\sin\alpha = \text{cste}$ où α est l'angle que le rayon fait avec l'axe des y.

20. Trouver la dérivée par rapport à A en $A = 0$ de la solution de l'équation $\ddot{x} = x + A\dot{x}^2$ qui vérifie les conditions $x(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = 0$.

21. Étudier la frontière de stabilité ($\max \Re\lambda_j < 0$) dans l'espace des coefficients de l'équation $x''' + ax'' + bx' + cx = 0$.

22. Résoudre l'équation quasi-homogène
$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{x^3}{y}.$$

23. Résoudre l'équation quasi-homogène
$$\ddot{x} = x^5 + x^2\dot{x}.$$

24. Est-ce qu'une position d'équilibre asymptotiquement stable peut devenir instable au sens de Lyapunov par linéarisation?

25. Étudier le comportement quand $t \to +\infty$ des solutions des systèmes
$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2\sin y - y - x \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2x - x^3 - x^2 - \epsilon y \end{array}\right.$$
où $\epsilon \ll 1$.

26. Dessiner les images des solutions de l'équation
$$\ddot{x} = F(x) - k\dot{x}\,,\ \ F = -dU/dx\,,$$
dans le plan des (x, E) où $E = \dot{x}^2/2 + U(x)$, près des points critiques non-dégénérés du potentiel U.

27. Dessiner le portrait de phase et étudier ses variations en fonction du paramètre ϵ :
$$\dot{x} = \epsilon x - (1+i)z|z|^2 + \overline{z}^4.$$

28. Une charge se meut dans un plan, avec une vitesse 1 sous l'action d'un champ électromagnétique fort $B(x, y)$ perpendiculaire au plan. Trouver la direction dans laquelle le centre du cercle de Larmor va dériver. Calculer la vitesse de cette dérivée (au premier ordre non nul). [Mathématiquement il s'agit de courbes de courbures NB quand $N \to \infty$.]

29. Trouver la somme des indices des points singuliers autres que l'origine du champs de vecteurs $z\overline{z}^2 + z^4 + \overline{z}^4$.

30. Trouver l'indice du point singulier à l'origine du champs de vecteurs de composantes
$$(x^4 + y^4 + z^4, x^3y - xy^3, xyz^2).$$

31. Trouver l'indice du point singulier à l'origine du champs de vecteurs
$$\mathrm{grad}(xy + yz + xz)\,.$$

32. Trouver les coefficients d'enlacements des trajectoires de phase de l'équation des petites oscillations $\ddot{x} = -4x, \ddot{y} = -9y$ sur une surface d'énergie totale.

33. Chercher les points singulier de la courbe $y = x^3$ dans le plan projectif.

34. Dessiner les géodésiques de la surface
$$(x^2 + y^2 - 2)^2 + z^2 = 1\,.$$

35. Dessiner la développante de la parabole cubique $y = x^3$ (la développante est le lieu des points $\vec{r}(s) + (c - s)\dot{\vec{r}}(s)$ où s est la longueur de l'arc de la courbe $\vec{r}(s)$ et c est une constante).

36. Montrer que dans l'espace euclidien, les surfaces
$$((A - \lambda E)^{-1}x, x) = 1$$
passant par x et correspondant à des valeurs de λ distinctes sont orthogonaux deux à deux (A est un opérateur symétrique sans valeur propre multiple).

37. Calculer l'intégrale de la courbure de Gauß de la surface
$$x^4 + (x^2 + y^2 - 1)(2x^2 + 3y^2 - 1) = 0\,.$$

38. Calculer l'intégrale de Gauß
$$\int \frac{(d\vec{A}, d\vec{B}, \vec{A} - \vec{B})}{|\,\vec{A} - \vec{B}\,|^3}\,,$$
où $\vec{A}$ parcourt la courbe $x = cos\alpha, y = \sin\alpha, x = 0$ et $\vec{B}$ la courbe $x = 2\cos^2\beta, y = 1/2\sin\beta, x = \sin 2\beta$.

39. Trouver l'image par transport parallèle d'ouest en est le long d'un parallèle fermé d'un vecteur situé à Saint-Petersbourg (Léningrad, latitude 60° et dirigé vers le nord.

40. Trouver la courbure géodésique de la droite $y = 1$ dans le demi-plan supérieur muni de la métrique de Lobatchevski-Poincaré
$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}\,.$$

41. Les médianes d'un triangle du plan de Lobatchevski sont-elles concourantes? Et les hauteurs?

42. Trouver les nombres de Betti de la surface $x_1^2 + \cdots x_k^2 - y_1^2 - \cdots - y_l^2 = 1$ et de l'ensemble $x_1^2 + \cdots x_k^2 \leq 1 + y_1^2 + \cdots + y_l^2$ dans un espace vectoriel de dimension $k + l$.

43. Trouver les nombres de Betti de la surface $x^2 + y^2 = 1 + z^2$ dans l'espace projectif de dimension 3. Même question pour les surfaces $z = xy, z = x^2, z^2 = x^2 + y^2$.

44. Trouver l'indice d'auto-intersection de la surface $x^4 + y^4 = 1$ dans le plan projectif $\mathbb{C}P^2$.

45. Trouver une représentation conforme de l'intérieur du disque unité sur le premier quadrant

46. Trouver une représentation conforme de l'extérieur du disque unité sur une ellipse donnée.

47. Trouver une représentation conforme du demi-plan privé d'un segment perpendiculaire au bord sur le demi-plan.

48. Calculer
$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{\sqrt{1 + z^{10}}} .$$

49. Calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{1 + x^2} dx .$$

50. Calculer l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \frac{1 - e^x}{1 + e^x} dx .$$

51. Calculer le premier terme du développement asymptotique, quand $k \to \infty$ de l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx} dx}{\sqrt{1 + x^{2n}}} .$$

52. Combien de solutions le problème
$$u_{xx} + \lambda u = \sin x, \; u(0) = u(\pi) = 0$$
possède-t-il?

53. Calculer la somme des commutateurs de matrices
$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] ,$$
où $[A, B] = AB - BA$.

Chapitre 3

Solutions des problèmes

Problème 2

On a d'une part

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(x^8)\,,$$

et

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)\,.$$

On en déduit

$$\sin\tan x = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{55}{1008}x^7 + o(x^8)\,,$$

et

$$\tan\sin x = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{107}{5040}x^7 + o(x^8)\,,$$

d'où

$$\sin\tan x - \tan\sin x = -\frac{1}{30}x^7 + o(x^8)\,.$$

D'autre part on a

$$\arcsin x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{4!}{2^{(2.2)}.(2!)^2}x^5 + \frac{6!}{2^{(2.3)}.(3!)^2}x^7 + o(x^8)\,,$$

et

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + o(x^8)\,.$$

On en déduit

$$\arcsin\arctan x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{13}{120}x^5 - \frac{341}{5040}x^7 + o(x^8)\,,$$

et

$$\arctan\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{13}{120}x^5 - \frac{173}{5040}x^7 + o(x^8)\,,$$

d'où

$$\arcsin \arctan x - \arctan \arcsin x = -\frac{1}{30}x^7 + o(x^8)\,.$$

On en conclut que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \tan x - \tan \sin x}{\arcsin \arctan x - \arctan \arcsin x} = 1\,.$$

Problème 4

La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+1}{x^3-x}$, comme toute fonction rationnelle, est dérivable sur son ensemble de définition, soit ici $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$; elle admet une décomposition en éléments simples. On recherche donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\frac{x^2+1}{x^3-x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}\,.$$

On trouve par identification :

$$a + b + c = 1\,,\ b + c = 0 \text{ et } -a = 1\,,$$

d'où $a = -1$, $b = 1$ et $c = 1$. Il s'agit donc de calculer, de façon générale, la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est donné. Soit f_α cette fonction. Par récurrence sur n on montre que

$${f_\alpha}^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{(x+\alpha)^{n+1}}\,.$$

Maintenant $f(x) = -f_0(x) + f_{-1}(x) + f_1(x)$ donc

$$\begin{aligned} f^{(100)}(x) &= -\frac{(-1)^{100}}{x^{101}} + \frac{(-1)^{100}}{(x-1)^{101}} + \frac{(-1)^{100}}{(x+1)^{101}} \\ &= -\frac{1}{x^{101}} + \frac{1}{(x-1)^{101}} + \frac{1}{(x+1)^{101}}\,. \end{aligned}$$

Problème 5

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+3x+2}$ est dérivable en 0, puisque son dénominateur ne s'y annule pas, et on a

$$f'(x) = -\frac{2x+3}{(x^2+3x+2)^2}\,,$$

donc $f'(0) = -3/4$ soit $f'(0) = -0,7$ à 10% près.

Problème 7

Il existe deux réels strictement positifs $a > b > 0$, et un repère orthornormé direct dans lequel l'ellipse $\mathcal{E}$ ait pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Une équation de la tangente $\mathcal{T}$ en un point $(x_1, y_1) \in \mathcal{E}$ est alors

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1\,.$$

Soit (x_0, y_0) un point du plan, avec $(x_0, y_0) \notin \mathcal{E}$. Une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par (x_0, y_0) et (x_1, y_1) est

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0 \\ \iff\ & (x - x_0)(y_1 - y_0) - (x_1 - x_0)(y - y_0) = 0 \\ \iff\ & (y_1 - y_0)x + (x_0 - x_1)y - x_0(y_1 - y_0) + (x_1 - x_0)y_0 = 0 \\ \iff\ & (y_1 - y_0)x + (x_0 - x_1)y - x_0y_1 + x_1y_0 = 0\,. \end{aligned}$$

Chercher les normales que l'on peut mener du point (x_0, y_0) à l'ellipse, c'est donc chercher les points (x_1, y_1) tels que $\mathcal{T} \perp \mathcal{D}$. On supposera d'abord que (x_0, y_0) n'est pas situé sur les axes de coordonnées. Le produit des coefficients directeurs de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{D}$ doit être égal à -1. Soit

$$\frac{-(y_1 - y_0)}{(x_0 - x_1)} \frac{-x_1/a^2}{y_1/b^2} = -1\,,$$

soit

$$\frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} \frac{x_1/a^2}{y_1/b^2} = 1\,,$$

soit

$$(y_1 - y_0)x_1b^2 = (x_1 - x_0)y_1a^2\,.$$

Problème 11

Soit C le carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Comme la fonction à intégrer est positive sur $\mathbb{R}^2$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{1 + x^4y^4} = \int_C \frac{dxdy}{1 + x^4y^4} + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus C} \frac{dxdy}{1 + x^4y^4}\,.$$

Pour $(x, y) \in C$ on a $x^4y^4 \geq 0$ donc $1 + x^4y^4 \geq 1$ puis $1/(1 + x^4y^4) \leq 1$. Ainsi

$$\int_C \frac{dxdy}{1 + x^4y^4} \leq \int_C dxdy = 4\,.$$

Pour $(x,y) \notin C$, on a $1 + x^4y^4 \geq x^4y^4$, donc

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus C} \frac{dxdy}{1+x^4y^4} \leq \int_{\mathbb{R}^2 \setminus C} \frac{dxdy}{x^4y^4} = \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} \frac{dx}{x^4} \times \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} \frac{dy}{y^4}\,.$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} \frac{dx}{x^4} &= \lim_{B\to-\infty} \int_B^{-1} \frac{dx}{x^4} + \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^4} \\
&= \lim_{B\to-\infty} \left[\frac{x^{-4+1}}{-4+1}\right]_B^{-1} + \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{x^{-4+1}}{-4+1}\right]_1^A \\
&= \lim_{B\to-\infty} \frac{1}{3} + \frac{1}{3B^3} + \lim_{A\to+\infty} \frac{-1}{3A^3} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{1+x^4y^4} \leq 4 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\,,$$

donc l'intégrale donnée converge.

Problème 76

Quelle que soit la valeur de λ, le problème possède une unique solution. On commence par étudier l'équation homogène

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0\,.$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 + \lambda = 0$.

Cas 1 : $\lambda < 0$. Alors $r = \pm\sqrt{-\lambda}$, et la solution générale de l'équation homogène est

$$u(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}\,,$$

où A et B sont des constantes.

On cherche ensuite une solution particulière de l'équation avec second membre solution $\alpha \sin x$. Si $\lambda \neq 1$, $\alpha = \frac{1}{\lambda-1}$ convient.

La solution générale de l'équation avec second membre est donc

$$u(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x} + \frac{1}{\lambda-1}\sin x\,.$$

Des conditions initiales $u(0) = u(\pi) = 0$ on déduit $B = A = 0$, donc la solution du problème est

$$u(x) = \frac{1}{\lambda-1}\sin x\,.$$

Cas 2 : $\lambda = 0$. La solution générale de l'équation $u''(x) = \sin x$ est

$$u(x) = -\sin(x) + Ax + B\,,$$

et les conditions initiales donne $B = A = 0$. La solution du problème est donc

$$u(x) = -\sin x\,.$$

Cas 3 : $\lambda > 0$ et $\lambda \neq 1$. Alors $r = \pm i\sqrt{\lambda}$, et la solution générale de l'équation homogène est

$$u(x) = Ae^{i\sqrt{\lambda}x} + Be^{-i\sqrt{\lambda}x}\,.$$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est encore

$$u(x) = \frac{1}{\lambda - 1}\sin x\,,$$

donc la solution générale de l'équation avec second membre est

$$u(x) = Ae^{i\sqrt{\lambda}x} + Be^{-i\sqrt{\lambda}x} + \frac{1}{\lambda - 1}\sin x\,,$$

et les conditions initiales donnent $B = A = 0$ donc le problème a pour solution unique

$$u(x) = \frac{1}{\lambda - 1}\sin x\,.$$

Cas 4 : $\lambda = 1$. La solution générale de l'équation homogène est

$$u(x) = Ae^{ix} + Be^{-ix}\,.$$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est

$$u(x) = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}x\cos x\,.$$

La solution générale de l'équation avec second membre est donc

$$u(x) = Ae^{ix} + Be^{-ix} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}x\cos x\,,$$

et les conditions initiales donnent $B = A = 0$. Le problème a donc pour solution unique

$$u(x) = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}x\cos x\,.$$

Problème 87

On a :

$$\begin{aligned}[A,[B,C]] &= A[B,C]-[B,C]A \\ &= A(BC-CB)-(BC-CB)A \\ &= ABC-ACB-BCA+CBA\,.\end{aligned}$$

Par permutations circulaires, on en déduit :

$$[B,[C,A]] = BCA - BAC - CAB + ACB\,,$$

et

$$[C,[A,B]] = CAB - CBA - ABC + BAC\,,$$

La somme des commutateurs $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]$ vaut donc 0.