THÉORÈME SPECTRAL POUR UN ENDOMORPHISME AUTOADJOINT D'UN ESPACE VECTORIEL EUCLIDIEN

• **Énoncé du théorème spectral**. Soit un espace vectoriel euclidien E, dont on note $(\ldots|\ldots)$ le produit scalaire et $\|\ldots\|$ la norme associée, et soit u un endomorphisme autoadjoint (*resp.* symétrique) de E. Alors, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E constituée de vecteurs propres de u.

• La démonstration se fonde sur deux lemmes.

• **Lemme 1**. Si un sous-espace F est stable par u, alors il en est de même de son orthogonal $F^{\perp}$.

▸ *Démonstration*. Soit $x \in F^{\perp}$ et $y \in F$. Alors : $u(y) \in F$, et :
$(u(x) \mid y) = (x \mid u(y)) = 0$. D'où : $u(x) \in F^{\perp}$. Trivial.

Moyennant ce lemme, il suffit de prouver que u admet une valeur propre réelle, et l'on conclut par récurrence sur la dimension.

• **Lemme 2**. Un endomorphisme autoadjoint (*resp.* symétrique) d'un espace vectoriel euclidien E admet une valeur propre réelle.

C'est ce lemme 2 qui n'est pas immédiat à démontrer, et qui peut se démontrer de plusieurs façons.

Démonstration par la compacité de la sphère-unité.

• Supposons $\dim E \geq 2$. Soit la sphère-unité $S = \{x \in E / \|x\| = 1\}$, qui est compacte. L'application : $x \mapsto (u(x) \mid x)$, de E dans $\mathbb{R}$, est continue et admet donc sur S un maximum, atteint pour un $x_0 \in S$. Soit $H = x_0^{\perp}$, soit $y \in H \setminus \{0\}$, et soit $z = \frac{y}{\|y\|}$, d'où : $z \in S$.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, soit $\phi(\theta) = x_0 \cos\theta + z \sin\theta$, qui est élément de S, d'où, en se souvenant que $(u(x_0) \mid z) = (u(z) \mid x_0)$:

$$\begin{aligned}(u(x_0) \mid x_0) \geq (u(\phi(\theta)) \mid \phi(\theta)) &= (u(x_0\cos\theta + z\sin\theta) \mid x_0\cos\theta + z\sin\theta)\\ &= (u(x_0) \mid x_0)\cos^2\theta + 2(u(x_0) \mid z)\sin\theta\cos\theta + (u(z) \mid z)\sin^2\theta,\end{aligned}$$

équivalent à : $((u(x_0) \mid x_0) - (u(z) \mid z))\sin^2\theta - 2(u(x_0) \mid z)\sin\theta\cos\theta \geq 0$.

Pour tout $\theta \in]0, \pi[$, ceci conduit à :

$$((u(x_0) \mid x_0) - (u(z) \mid z))\sin\theta - 2(u(x_0) \mid z)\cos\theta \geq 0.$$

Quand $\theta \to 0^+$, on en déduit : $-2(u(x_0) \mid z) \geq 0$.

Et quand $\theta \to \pi^-$, on en déduit : $2(u(x_0) \mid z) \geq 0$.

On en conclut : $(u(x_0) \mid z) = 0$, d'où : $(u(x_0) \mid y) = 0$, pour tout $y \in H = x_0^{\perp}$.

Ceci signifie que : $u(x_0) \in H^{\perp} = (x_0^{\perp})^{\perp} = Vect(x_0)$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x_0) = \lambda x_0$.

Autrement dit, le vecteur x_0 est un vecteur propre de u.

On peut préciser : $\max_{\|x\|=1}(u(x) \mid x) = (u(x_0) \mid x_0) = \lambda\|x_0\|^2 = \lambda$.

Roger CUCULIÈRE • Lycée Pasteur, 92200 Neuilly-sur-Seine
• 05/02/2011 • <*rcuculiere@free.fr*> • ®©