Triangles vérifiant $\beta = n\alpha$

Gilles Auriol
auriolg@free.fr — http://auriolg.free.fr

On considère un triangle ABC et on note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\alpha = \widehat{A}$, $\beta = \widehat{B}$ et $\gamma = \widehat{C}$. Dans ce papier on cherche des conditions nécessaires et suffisantes portant sur a, b, c pour que $\beta = n\alpha$, avec $n = 2, 3, 4$. On s'intéresse également à la recherche de triangles ayant des côtés entiers vérifiant ces conditions.

1 Généralités

Théorème 1. — Soit $n \geqslant 2$ un entier et un triangle non plat tel que $\beta = n\alpha - 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Nécessairement $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{n-1}{2}$. On pose $I_{k,n} = \left]\dfrac{2k}{n}\pi ; \dfrac{2k+1}{n+1}\pi\right[$. Alors

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}, \quad \beta = n\alpha - 2k\pi \Leftrightarrow \alpha \in I_{k,n}.$$

De plus,

(i) Si $\alpha \in I_{0,n}$, c'est-à-dire si $\beta = n\alpha$, alors a, b, c vérifient

$$a < b < na \ \text{ et } \ \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n+1}} < \frac{c}{b-a} < \frac{n+1}{n-1}. \tag{1}$$

Réciproquement, si a, b, c sont trois réels strictement positifs vérifiant (1), il existe un triangle non plat de côtés a, b, c.

(ii) Si $\alpha \in I_{k,n}$, avec $1 \leqslant k < \dfrac{n-1}{4}$, on a

- $a > b \Leftrightarrow \alpha < \dfrac{2k}{n-1}\pi$ et alors $\dfrac{c}{b-a} < -1$;
- $a < b \Leftrightarrow \alpha > \dfrac{2k}{n-1}\pi$ et alors $\dfrac{c}{b-a} > \dfrac{1}{\cos\left(\frac{2k+1}{n+1}\pi\right)} > 1$;
- $a = b \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{2k}{n-1}\pi$.

(iii) Si $\alpha \in I_{k,n}$, avec $k = \dfrac{n-1}{4}$, alors $a > b$ et $\dfrac{c}{b-a} < -1$.

(iv) Si $\alpha \in I_{k,n}$, avec $k > \dfrac{n-1}{4}$, alors $a > b$ et $\dfrac{1}{\cos\left(\frac{2k+1}{n+1}\pi\right)} < \dfrac{c}{b-a} < -1$.

Preuve. — 1) L'entier k existe si et seulement si $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$ et $0 < \alpha + \beta < \pi$. Or

$$0 < \beta < \pi \Leftrightarrow 0 < n\alpha - 2k\pi < \pi \Leftrightarrow \frac{2k}{n}\pi < \alpha < \frac{2k+1}{n}\pi \tag{2}$$

et

$$0<\alpha+\beta<\pi \Leftrightarrow 0<(n+1)\alpha-2k\pi<\pi \Leftrightarrow \frac{2k}{n+1}\pi<\alpha<\frac{2k+1}{n+1}\pi \tag{3}$$

Ainsi (2) et (3) sont équivalentes à $\alpha \in I_{n,k}$ puisque $\dfrac{2k}{n+1}<\dfrac{2k}{n}$ et $\dfrac{2k+1}{n+1}<\dfrac{2k+1}{n}$. De plus l'inégalite (2) montre que $\dfrac{2k}{n}\pi \geqslant 0$ et $\dfrac{2k+1}{n}\pi \leqslant \pi$, donc que $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{n-1}{2}$.

2) La formule des sinus donne

$$\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b-a}{\sin\beta-\sin\alpha}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{c}{b-a}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta-\sin\alpha}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta-\sin\alpha}=\frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{n-1}{2}\alpha}.$$

Soit $f:\alpha\mapsto\dfrac{c}{b-a}$ la fonction de α définie pour $a\neq b$. Il vient

$$f'(\alpha)=\frac{g(\alpha)}{\sin^2\frac{n-1}{2}\alpha} \text{ où } g(\alpha)=\frac{n+1}{2}\cos\frac{n+1}{2}\alpha\sin\frac{n-1}{2}\alpha-\frac{n-1}{2}\cos\frac{n-1}{2}\alpha\sin\frac{n+1}{2}\alpha.$$

En transformant les produits en somme,

$$g(\alpha)=\frac{n+1}{2}\frac{1}{2}(\sin n\alpha+\sin(-\alpha))-\frac{n-1}{2}\frac{1}{2}(\sin n\alpha+\sin\alpha)=\frac{1}{2}\sin n\alpha-\frac{n}{2}\sin\alpha$$

Notons pour la suite que

$$g'(\alpha)=\frac{n}{2}(\cos n\alpha-\cos\alpha)=\frac{n}{2}(\cos\beta-\cos\alpha).$$

3) Pour $0\leqslant k<\dfrac{n-1}{2}$, le dénominateur de $f\left(\dfrac{2k+1}{n+1}\pi\right)$ est égal à

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{n-1}{n+1}\frac{2k+1}{2}\pi\right)&=\sin\left(\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\frac{2k+1}{2}\pi\right)=\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{2k+1}{n+1}\pi\right)\\&=(-1)^k\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2k+1}{n+1}\pi\right)=(-1)^k\cos\left(\frac{2k+1}{n+1}\pi\right)\end{aligned} \tag{4}$$

par conséquent, lorsque $\dfrac{2k+1}{n+1}\pi\neq\dfrac{\pi}{2}$ (c'est-à-dire $k\neq\dfrac{n-1}{4}$),

$$f\left(\frac{2k+1}{n+1}\pi\right)=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\frac{2k+1}{n+1}\pi\right)}{(-1)^k\cos\left(\frac{2k+1}{n+1}\pi\right)}=\frac{\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{(-1)^k\cos\left(\frac{2k+1}{n+1}\pi\right)}=\frac{1}{\cos\left(\frac{2k+1}{n+1}\pi\right)}. \tag{5}$$

4) Rappelons que $a<b$ équivaut à $\alpha<\beta$; en effet :

$$\begin{aligned}\alpha<\beta\Leftrightarrow\cos\alpha>\cos\beta\Leftrightarrow\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\Leftrightarrow a(b^2+c^2-a^2)>b(a^2+c^2-b^2)\\ \Leftrightarrow b^3-a^3+bc^2-ac^2+ab^2-a^2b>0\Leftrightarrow(b-a)(b^2+ab+b^2)+(b-a)c^2+ab(b-a)>0\\ \Leftrightarrow(b-a)\left[(a+b)^2+c^2\right]>0\Leftrightarrow b>a.\end{aligned}$$

Dans le cas présent, pour $\alpha \in I_{k,n}$,

$$a < b \Leftrightarrow \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha < n\alpha - 2k\pi \Leftrightarrow \frac{2k}{n-1}\pi < \alpha. \tag{6}$$

5) On peut à présenter démontrer le théorème.

(i) – Pour $k = 0$, l'inégalité (6) est toujours vérifiée, donc $\alpha \in I_{0,n} = \left]0; \frac{\pi}{n+1}\right[\Rightarrow a < b$.

– D'après la formule des sinus, $\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}$. Or $\forall (x,n) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{N}^*$ on a $|\sin nx| < n|\sin x|$ (raisonner par récurrence sur n et utiliser la formule d'addition du sinus). Par conséquent on a $\frac{b}{a} < \frac{n\sin\alpha}{\sin\alpha} = n$ d'où $b < na$.

– Puisque $0 < \alpha < \beta < \pi$, on a $g'(\alpha) < 0$, donc g est strictement décroissante. Elle vérifie $g(0) = 0$, donc $g < 0$ et f est strictement décroissante. Ainsi $\lim_{\alpha\to 0} f(\alpha) > f(\alpha) > f\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$. Or d'après (5) $f\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n+1}}$ et

$$\frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{n-1}{2}\alpha} \underset{\alpha\to 0}{\sim} \frac{\frac{n+1}{2}\alpha}{\frac{n-1}{2}\alpha} = \frac{n+1}{n-1}$$

ce qui donne bien l'inégalité $\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n+1}} < \frac{c}{b-a} < \frac{n+1}{n-1}$.

– Réciproquement, soit a, b, c des réels strictements positifs vérifiant (1). On a $a - b < 0 < c$, et comme $\cos\frac{\pi}{n+1} < 1$,

$$b - a < \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n+1}}(b-a) < c.$$

Enfin comme $b < na$,

$$c < b\frac{n+1}{n-1} - a\frac{n+1}{n-1} = b + b\frac{2}{n-1} - a\frac{n+1}{n-1} < b + \left(\frac{2n}{n-1} - \frac{n+1}{n-1}\right)a = b + a.$$

Ainsi $|b - a| < c < a + b$, ce qui prouve que a, b, c sont les côtés d'un triangle non plat.

Supposons maintenant $k > 0$. Comme $\frac{2k}{n-1}\pi > \frac{2k}{n}\pi$, on a

$$\frac{2k}{n-1} \in I_{n,k} \Leftrightarrow \frac{2k}{n-1}\pi < \frac{2k+1}{n+1}\pi \Leftrightarrow 2k(n+1) < (2k+1)(n-1) \Leftrightarrow k < \frac{n-1}{4}. \tag{7}$$

(ii) Suppsons $1 \leqslant k < \frac{n-1}{4}$.

– Pour $\alpha < \frac{2k}{n-1}\pi$, on a $a > b$, donc

$$a < b + c \Leftrightarrow a - b < c \Leftrightarrow 1 < \frac{c}{a-b} \Leftrightarrow -1 > \frac{c}{b-a}$$

– Pour $\alpha > \dfrac{2k}{n-1}\pi$, on a $a < b$, donc $\alpha < \beta$. Ainsi $g'(\alpha) < 0$ d'où l'on déduit que g est strictement décroissante sur $\left]\dfrac{2k}{n-1}\pi; \dfrac{2k+1}{n+1}\pi\right[$. Comme

$$g\left(\frac{2k\pi}{n-1}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(2k\pi + \frac{2k\pi}{n-1}\right) - \frac{n}{2}\sin\frac{2k\pi}{n-1} = \frac{1-n}{2}\sin\frac{2k\pi}{n-1} < 0,$$

il vient que $g < 0$, donc f est strictement décroissante. Enfin de (5), on déduit bien $\dfrac{c}{b-a} > \dfrac{1}{\cos\left(\frac{2k+1}{n+1}\pi\right)} > 1$, la dernière inégalité résultant de

$$\frac{2k+1}{n+1}\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow k < \frac{n-1}{4}.$$

(iv) Si $k \geqslant \dfrac{n-1}{4}$ grâce à (6) et (7), $a > b$. Il en résulte que $\alpha > \beta$, donc que $g' > 0$ puis que g est croissante. Or

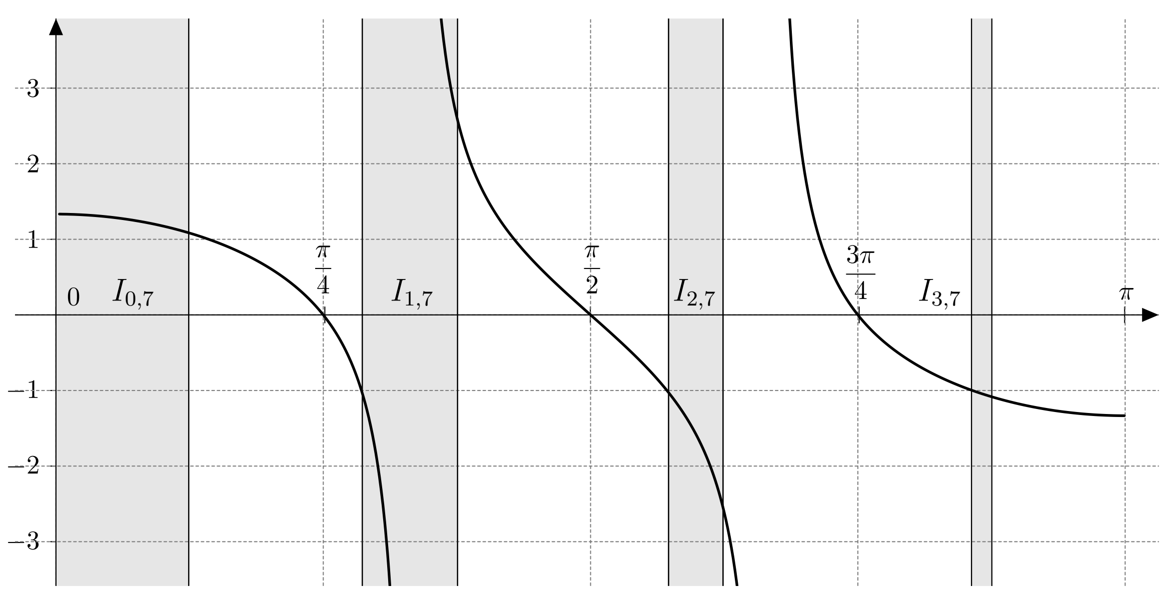
$$\begin{aligned} g\left(\frac{2k+1}{n+1}\pi\right) &= \frac{1}{2}\sin\left((2k+1)\pi - \frac{2k+1}{n+1}\pi\right) - \frac{n}{2}\sin\left(\frac{2k+1}{n+1}\pi\right) \\ &= -\frac{n+1}{2}\sin\left(\frac{2k+1}{n+1}\pi\right) < 0, \end{aligned}$$

donc $g < 0$ et f est décroissante. Finalement grâce à (4) et (5), il vient lorsque $k \neq \dfrac{n-1}{4}$,

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{2k+1}{n+1}\pi\right)} < \frac{c}{b-a} < -1.$$

Si $k = \dfrac{n-1}{4}$, on obtient seulement $\dfrac{c}{b-a} < -1$ d'où (iii). ■

La figure ci-dessous donne la courbe représentative de f pour $n = 7$ ainsi que les intervalles $I_{k,7}$. On voit bien apparaître la coupure pour $a = b$ dans $I_{1,7}$.



2 Cas $n = 2$

Théorème 2. — Les réels strictement positifs a, b, c sont les côtés d'un triangle non plat vérifiant $\beta = 2\alpha$ si et seulement si

$$b < 2a \ \text{ et } \ b^2 = a^2 + ac. \tag{$\mathbf{R_2}$}$$

Preuve. — Soit ABC un triangle non plat avec $\beta = 2\alpha$. La formule des sinus donne

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin 2\alpha} = \frac{b}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

d'où l'on déduit que $\cos\alpha = \dfrac{b}{2a}$. D'après le théorème 1, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}$, donc $\dfrac{1}{2} < \cos\alpha < 1$, ce qui implique $a < b < 2a$.

Par ailleurs $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. L'égalité $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{b}{2a}$ équivaut à la nullité de

$$\begin{aligned} 2a(b^2+c^2-a^2) - 2b^2c = ab^2 + ac^2 - a^3 - b^2c = b^2(a-c) + a(c^2-a^2) = b^2(a-c) - a(a-c)(a+c) \\ = (a-c)\left[b^2 - a(a+c)\right] = (a-c)(b^2-a^2-ac). \end{aligned}$$

Si $a = c$, le triangle est isocèle en B et l'hypothèse $\beta = 2\alpha$ implique que $\pi = \alpha + \beta + \gamma = 4\alpha$, d'où $\beta = 2\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi ABC est rectangle en B, donc $b^2 = a^2 + c^2 = a^2 + ac$.
Si $a \neq c$, le second facteur est nul, on a donc également $b^2 = a^2 + ac$.

Réciproquement, soit a, b, c trois réels strictement positifs vérifiant $b < 2a$ et R_2. On a

$$(b-a)(b+a) = ac > 0,$$

donc $a < b$. De plus R_2 pouvant s'écrire $\dfrac{c}{b-a} = \dfrac{a+b}{a}$, il résulte de l'équivalence

$$\left\{\begin{array}{l} a < b \\ b < 2a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2a < b + a \\ a + b < 3a \end{array}\right. \Leftrightarrow 2a < a + b < 3a \Leftrightarrow 2 < \frac{a+b}{a} < 3. \tag{8}$$

l'encadrement $2(b-a) < c < 3(b-a)$. Grâce au théorème 1 (i), on conclut que a, b, c sont les côtés d'un triangle non plat.

En utilisant R_2 à deux reprises,

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \overset{\mathrm{R}_2}{=} \frac{ac+c^2}{2bc} = \frac{a+c}{2b} = \frac{a^2+ac}{2ab} \overset{\mathrm{R}_2}{=} \frac{b^2}{2ab} = \frac{b}{2a} > \frac{1}{2}$$

donc $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}$. Par la formule de duplication

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{b^2}{2a^2} - 1 = \frac{b^2-2a^2}{2a^2} \overset{\mathrm{R}_2}{=} \frac{ac-a^2}{2a^2} = \frac{c-a}{2a} = \frac{c^2-ac}{2ac} \overset{\mathrm{R}_2}{=} \frac{c^2-(b^2-a^2)}{2ac} = \cos\beta.$$

Comme $2\alpha \in \left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$ et $\beta \in [0, \pi]$, il en résulte $\beta = 2\alpha$. ∎

Remarque 1. — Un logiciel de calcul formel donne

$$\cos 2\alpha - \cos\beta = \frac{(a+c)(a+b-c)(b+c-a)(b^2-a^2-ac)}{2ab^2c^2}.$$

On voit apparaître les conditions pour avoir $\beta = 2\alpha$. L'égalité $a+b-c=0$ traduit que ABC est plat avec $\alpha=\beta=0$. L'égalité $b+c-a=0$ implique que ABC est plat avec $\alpha=\pi$ et $b=0$ et l'on a $\beta=2\alpha$ mais modulo 2π.

Triangles entiers vérifiant cette condition. — Si un triplet (a,b,c) vérifie R_1, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, le triplet (ka,kb,kc) vérifie aussi R_1. On se limitera donc à la recherche de a,b,c premiers entre eux.

Proposition. — Soit a,b,c des entiers premiers entre eux vérifiant R_2. Alors a est un carré.

Preuve. — En effet si a n'est pas un carré, comme $b^2=a(a+c)$, a et $a+c$ admettent un diviseur commun premier p (dont la valuation dans chacun d'eux est impaire). Mais alors p divise $a+c-a=c$, et également b puisque $a|b^2$, ce qui contredit le fait que a,b,c sont premiers entre eux. ∎

Pour un entier N donné, la procédure Maple suivante renvoie la liste de tous les triplets (a,b,c) d'entiers premiers entre eux vérifiant R_1 et $a\leqslant N^2$.
D'après la proposition, a s'écrit u^2 pour un u tel que $1\leqslant u\leqslant N$, et comme a divise b^2 il en résulte que u divise b. Ainsi $b=a+ku$ pour un certain k. Cette observation permet de réduire les calculs. Les encadrements $a<b<2a$ et $2(b-a)<c<3(b-a)$ sont essentiels pour mener à bien cette recherche.

```
recherche := proc(N)
local L, a, b, c, u;
L := [];
for u from 1 to N do
   a:=u^2;
   for b from a+u to 2*a-u by u do
      for c from 2*(b-a)+1 to 3*(b-a)-1 do
         if b^2=a*(a+c) and igcd (a,b,c)=1 then
            L := [op(L), [a, b, c]];
         end if
      end do
   end do
end do;
print(L);
end proc;
```

Pour $N=5$, on trouve 9 solutions, à savoir $(4,6,5)$, $(9,12,7)$, $(9,15,16)$, $(16,20,9)$, $(16,28,33)$, $(25,30,11)$, $(25,35,24)$, $(25,40,39)$, $(25,45,56)$. Pour $N=100$, on dénombre 3043 triplets.

3 Cas $n = 3$

Théorème 3. — Soit la relation

$$(a-b)^2(a+b) = ac^2. \tag{$\mathbf{R_3}$}$$

Les réels strictement positifs a, b, c sont les côtés d'un triangle non plat vérifiant

(i) $\beta = 3\alpha$ si et seulement si R_3 et $a < b < 3a$.

(ii) $\beta = 3\alpha - 2\pi$ si et seulement si R_3 et $a > b$.

Preuve. — Soit $a, b, c > 0$ vérifiant R_3. Alors $a \neq b$, sinon on aurait $ac^2 = 0$.
La relation R_3 peut se réécrire sous diverses formes qui seront utilisées dans la suite :

$$\frac{c}{b-a} = \frac{b^2-a^2}{ac} \Leftrightarrow \left(\frac{c}{b-a}\right)^2 = 1 + \frac{b}{a} \Leftrightarrow (b^2-a^2)(b-a) = ac^2 \Leftrightarrow a^3 + b^3 = a^2b + ab^2 + ac^2.$$

Si a, b, c sont les côtés d'un triangle vérfiant R_3, on a

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{ab^2+ac^2-a^3}{2abc} \overset{\mathrm{R}_3}{=} \frac{b^3-a^2b}{2abc} = \frac{b^2-a^2}{2ac} \overset{\mathrm{R}_3}{=} \frac{c}{2(b-a)}. \tag{9}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha = \cos\alpha(4\cos^2\alpha - 3) &= \frac{b^2-a^2}{2ac}\left[\left(4\frac{c}{2(b-a)}\right)^2 - 3\right] \overset{\mathrm{R}_3}{=} \frac{b^2-a^2}{2ac}\left(1 + \frac{b}{a} - 3\right)\\ &= \frac{b^2-a^2}{2ac}\,\frac{b-2a}{a} = \frac{(b^2-a^2)(b-a) + (b^2-a^2)(-a)}{2a^2c} \overset{\mathrm{R}_3}{=} \frac{ac^2 + (b^2-a^2)(-a)}{2a^2c}\\ &= \frac{ac^2 - ab^2 + a^3}{2a^2c} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \cos\beta.\end{aligned}$$

(i) Supposons $a < b < 3a$, c'est-à-dire $1 < \dfrac{b}{a} < 3$. Alors

$$\left(\frac{c}{b-a}\right)^2 = 1 + \frac{b}{a} \Rightarrow 2 < \left(\frac{c}{b-a}\right)^2 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2}(b-a) < c < 2(b-a)$$

donc d'après le théorème 1 (i), a, b, c sont les côtés d'un triangle non plat.
De $\sqrt{2} < \dfrac{c}{b-a} < 2$ et (9), on déduit que $0 < 3\alpha < \dfrac{3\pi}{4}$. De plus $0 < \beta < \pi$, donc l'égalité $\cos 3\alpha = \cos\beta$ implique que $\beta = 3\alpha$.

(ii) Supposons $a > b$. D'après R_3,

$$\left[(a-b)^2 - c^2\right](a+b) = (a-b)^2(a+b) - c^2(a+b) \overset{\mathrm{R}_3}{=} ac^2 - c^2(a+b) = -bc^2 < 0$$

donc $|a-b| < c$. De plus

$$\begin{aligned}c < a+b \Leftrightarrow c^2 < (a+b)^2 \Leftrightarrow ac^2 < a(a+b)^2 &\overset{\mathrm{R}_3}{\Leftrightarrow} (a-b)^2(a+b) < a(a+b)^2\\ &\Leftrightarrow (a-b)^2 < a(a+b) \Leftrightarrow b(b-3a) < 0\end{aligned}$$

et puisque $a > b$, on a $b - 3a < 0$, donc $c < a + b$. Finalement $|a - b| < c < a + b$ et a, b, c sont les côtés d'un triangle non plat.

Alors $\left(\dfrac{c}{b-a}\right)^2 = 1 + \dfrac{b}{a} < 2$, donc $\left|\dfrac{c}{b-a}\right| < \sqrt{2}$ puis $\dfrac{c}{b-a} > -\sqrt{2}$ (puisque $b - a < 0$). De plus $a < b + c \Leftrightarrow \dfrac{c}{b-a} < -1$. Ainsi $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \cos\alpha < -\dfrac{1}{2}$, d'où il résulte que $\dfrac{2\pi}{3} < \alpha < \dfrac{3\pi}{4}$. De $2\pi < 3\alpha < \dfrac{9\pi}{4}$, $0 < \beta < \pi$ et $\cos 3\alpha = \cos\beta$ on déduit que $\beta = 3\alpha - 2\pi$.

2) Réciproquement, soit T un triangle non plat vérifiant $\beta = 3\alpha$ ou $\beta = 3\alpha - 2\pi$.
Le théorème 1 montre que dans le premier cas $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ et dans le second $\dfrac{2\pi}{3} < \alpha < \dfrac{3\pi}{4}$.
On a $\cos\beta = \cos 3\alpha$ et $\sin\beta = \sin 3\alpha$. La règle des sinus permet d'écrire

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin 3\alpha} = \frac{b}{\sin\alpha(3 - 4\sin^2\alpha)} = \frac{b}{\sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1)}$$

d'où il résulte que $4\cos^2\alpha - 1 = \dfrac{b}{a}$ et donc $\cos^2\alpha = \dfrac{a+b}{4a}$. D'autre part $\cos^2\alpha = \left(\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2$.
L'égalité de ces deux fractions équivaut à la nullité de

$$\begin{aligned}
& b^2c^2(a+b) - a(b^2 + c^2 - a^2)^2 \\
= \;& b^2c^2(a+b) - a\left[b^4 + 2b^2(c^2 - a^2) + (c^2 - a^2)^2\right] \\
= \;& b^2\left[c^2(a+b) - ab^2 - 2a(c^2 - a^2)\right] - a(c^2 - a^2)^2 \\
= \;& b^2\left[c^2(b-a) - a(b^2 - a^2) + a^3\right] - a(c^2 - a^2)^2 \\
= \;& b^2(b-a)\left[c^2 - a(a+b)\right] + b^2a^3 - a(c^2 - a^2)^2 \\
= \;& b^2(b-a)(c^2 - a^2 - ab) - a\left[(c^2 - a^2)^2 - a^2b^2\right] \\
= \;& b^2(b-a)(c^2 - a^2 - ab) - a(c^2 - a^2 - ab)(c^2 - a^2 + ab) \\
= \;& (c^2 - a^2 - ab)\left[b^2(b-a) - a(c^2 - a^2 + ab)\right] \\
= \;& (c^2 - a^2 - ab)(a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 - ac^2).
\end{aligned}$$

La second facteur est égal à

$$a^2(a-b) + b^2(b-a) - ac^2 = (a^2 - b^2)(a-b) - ac^2 = (a-b)^2(a+b) - ac^2$$

donc s'il est nul R_3 est vérifiée. Sinon, c'est le premier facteur qui est nul et d'après le théorème 2 cela équivaut à $\gamma = 2\alpha$, avec $\alpha < \dfrac{\pi}{3}$. On ne peut pas être dans le cas $\beta = 3\alpha - 2\pi$ car on aurait $\dfrac{2\pi}{3} < \alpha < \dfrac{3\pi}{4}$. Donc $\beta = 3\alpha$ et l'égalité $\pi = \alpha + \beta + \gamma = 6\alpha$ implique $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, ce qui prouve que T est un demi-triangle équilatéral. Il vérifie $b^2 = a^2 + c^2$ et $b = 2a$, d'où l'on déduit que R_3 est vérifiée.

Si $\beta = 3\alpha$, on a forcément $a < b$, sinon d'après le sens direct, on aurait $\beta = 3\alpha - 2\pi$. De même si $\beta = 3\alpha - 2\pi$, le sens direct implique $a > b$. ■

Remarque 2. — Un logiciel de calcul formel donne

$$\cos 3\alpha - \cos\beta = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c^2 + ab - a^2)(a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 - ac^2)}{2ab^3c^3} \tag{10}$$

L'analyse de la condition $c^2 + ab - a^2$ conduit au résultat suivant.

Théorème 4. — Les réels strictement positifs a, b, c sont les côtés d'un triangle non plat vérifiant $3\alpha+\beta=2\pi$ si et seulement si

$$a^2 = ab + c^2. \tag{$\mathbf{R}_3'$}$$

Dans ce cas $b<a$, $c<a$ et $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{2\pi}{3}$.

Preuve. — 1) Soit trois réels $a, b, c>0$ tels que $a^2=ab+c^2$. Les inégalités $b<a$ et $c<a$ sont claires, il vient donc $|b-c|<a$. D'autre part

$$c<a \Rightarrow c^2<ac \overset{\mathrm{R}_3'}{\Rightarrow} a^2-ab<ac \Rightarrow a<b+c,$$

donc finalement $|b-c|<a<b+c$, ce qui prouve l'existence du triangle de côtés a, b, c.

En observant que R_3' peut s'écrire $c^2=a^2+a(-b)$, on constate que cette relation est R_2 pour $(a, c, -b)$. Il suffit de remplacer (b, c) par $(c, -b)$ dans les calculs du théorème 2 pour obtenir

$$\cos\alpha = -\frac{c}{2a} \text{ et } \cos 2\alpha = \frac{(-b)^2-(c^2-a^2)}{2a(-b)} = -\cos\gamma.$$

Comme $-1<-\dfrac{c}{a}<0$, la première égalité montre que $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{2\pi}{3}$. Il en résulte $0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ et $\pi<2\alpha<\dfrac{4\pi}{3}$, donc l'égalité $\cos 2\alpha=-\cos\gamma$ permet de conclure que $2\alpha-\gamma=\pi$. Or

$$3\alpha+\beta=2\pi \Leftrightarrow 3\alpha+(\pi-\alpha-\gamma)=2\pi \Leftrightarrow 2\alpha-\gamma=\pi,$$

ce qui donne le résultat voulu.

2) Réciproquement, soit un triangle tel que $3\alpha+\beta=2\pi$. D'après l'équivalence ci-dessus, on a $2\alpha-\gamma=\pi$, d'où $\alpha>\dfrac{\pi}{2}$ puis $\cos\alpha<0$. De plus comme $3\alpha<2\pi$, on a $\alpha<\dfrac{2\pi}{3}$. Ainsi α vérifie l'inégalité $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{2\pi}{3}$.

On reprend alors la démonstration de la réciproque du théorème 3. Comme $\sin\beta=-\sin 3\alpha$, la formule des sinus montre que $4\cos^2\alpha-1=-\dfrac{b}{a}$ et donc $\cos^2\alpha=\dfrac{a-b}{4a}$. Notons pour la suite que cela implique $a>b$.

Par conséquent l'égalité $\dfrac{a-b}{4a}=\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2$ donne la même condition où l'on remplace b par $-b$, à savoir

$$(c^2-a^2+ab)(a^3-b^3+a^2b-ab^2-ac^2)=0.$$

Il reste à montrer que le second facteur est non nul pour conclure. Supposons que $a^3-b^3+a^2b-ab^2-ac^2=0$. Alors $a(b^2+c^2-a^2)=ba^2-b^3$ d'où

$$\cos\alpha = \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2abc} = \frac{ba^2-b^3}{2abc} = \frac{a^2-b^2}{2ac} > 0 \text{ car } a>b,$$

en contradiction avec $\cos\alpha<0$. Ainsi $c^2-a^2+ab=0$. ∎

Remarque 3. — L'utilisation de l'identité (10) permet de démontrer la réciproque plus rapidement. En effet, la nullité de $\cos 3\alpha-\cos\beta$ ne peut pas provenir de celle de $a+b-c$ (immédiat), ni de celle du dernier facteur puisque d'après le théorème 3 celle-ci impliquerait $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ ou $\dfrac{2\pi}{3}<\alpha<\dfrac{3\pi}{4}$, contredisant $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{2\pi}{3}$.

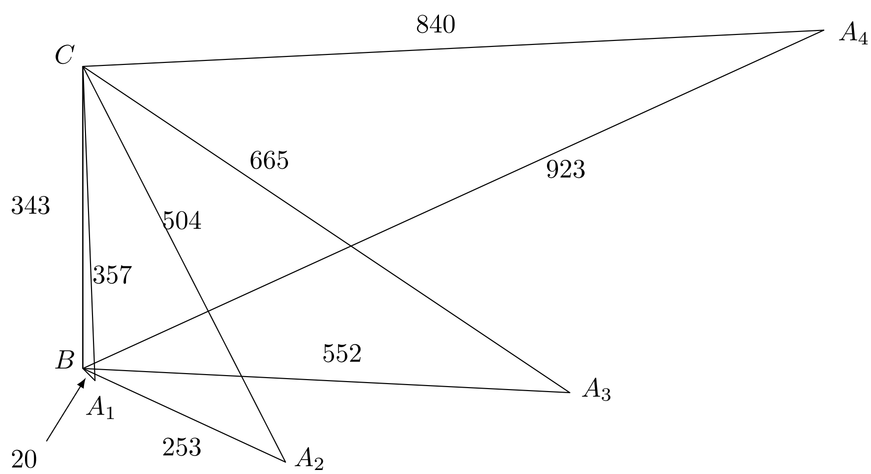
Triangles entiers vérifiant ces conditions. — On cherche les couples d'entiers (a, b, c) premiers entre eux vérifiant R_3 ou R'_3. Comme précédemment si (a, b, c) vérifie R_3, a est un carré.

Proposition. — Soit a, b, c des entiers premiers entre eux vérifiant R_3. Alors a est un cube.

Preuve. — En effet en écrivant R_2 sous la forme $b^3 = a(ab + b^2 + c^2 - a^2)$, on constate que si a n'est pas un cube, a et $ab + b^2 + c^2 - a^2$ admette un facteur commun premier p, diviseur de b. Mais alors $c^2 = (ab + b^2 + c^2 - a^2) - ab - b^2 + a^2$ est divisible par p et c aussi, ce qui contredit le fait que a, b, c sont premiers entre eux. ■

Une recherche exhaustive des tels triplets vérifiant R_3 ou R'_3 conduit aux observations suivantes.

- $\beta = 3\alpha$. Pour $N = 7$, on trouve 10 solutions : $(8, 10, 3)$, $(27, 48, 35)$, $(64, 132, 119)$, $(125, 195, 112)$, $(125, 280, 279)$, $(216, 510, 539)$, $(343, 357, 20)$, $(343, 504, 253)$, $(343, 665, 552)$ et $(343, 840, 923)$. Pour $N = 20$ on en trouve 75 ;
- $\beta = 3\alpha - 2\pi$. Pour $N = 7$, on trouve 7 solutions : $(27, 21, 8)$, $(64, 36, 35)$, $(125, 55, 84)$, $(125, 120, 7)$, $(216, 78, 161)$, $(343, 105, 272)$ et $(343, 224, 153)$. Pour $N = 5000$ on en trouve 39 ; ???
- $3\alpha + \beta = 2\pi$. Pour $N = 4$, on trouve 5 solutions : $(4, 3, 2)$, $(9, 8, 3)$, $(9, 5, 6)$, $(16, 15, 4)$, $(16, 7, 12)$. Pour $N = 1000$, on en dénombre 307.



4 Cas $n = 4$

Un logiciel de calcul formel donne le point de départ grâce à l'identité

$$\cos 4\alpha - \cos\beta = \frac{(a+b-c)(b+c-a)}{2ab^4c^4} \times (c^3 - a^3 + ab^2 + ac^2 - ca^2)(a^4 + b^4 - 2b^2a^2 - ac^3 - a^2c^2 + a^3c - ab^2c) \quad (11)$$

La condition $c^3 - a^3 + ab^2 + ac^2 - ca^2 = 0$ est R_3 pour le triplet $(a, c, -b)$. Par conséquent

$$c^3 - a^3 + ab^2 + ac^2 - ca^2 = 0 \Leftrightarrow (a-c)(a+c)^2 = ab^2.$$

Quant au dernier facteur on peut l'écrire

$$\begin{aligned}
a^4+b^4-2b^2a^2-ac^3-a^2c^2+a^3c-ab^2c &= (b^2-a^2)^2-ac(b^2-a^2)+c^2(-a^2-ac)\\
&= (b^2-a^2)(b^2-a^2-ac)+c^2(-a^2-ac+b^2)-c^2b^2=(b^2+c^2-a^2)(b^2-ac-a^2)-b^2c^2.
\end{aligned}$$

Théorème 5. — Soit la relation

$$(b^2+c^2-a^2)(b^2-ac-a^2)=b^2c^2. \qquad (\mathbf{R_4})$$

Les réels strictement positifs a, b, c sont les côtés d'un triangle non plat vérifiant

(i) $\beta = 4\alpha$ si et seulement si R_4 et $a < b < 4a$;

(ii) $\beta = 4\alpha - 2\pi$ si et seulement si R_4 et $a > b$.

Théorème 6. — Les réels strictement positifs a, b, c sont les côtés d'un triangle non plat vérifiant $4\alpha + \beta = 2\pi$ si et seulement si

$$(a-c)(a+c)^2 = ab^2 \qquad (\mathbf{R'_4})$$

Dans ce cas $\dfrac{\pi}{3} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Preuve (des deux théorèmes). — 1) Soit a, b, c vérifiant R_4. Alors $a \neq b$ et $\cos 4\alpha = \cos\beta$ d'après (11).

(i) Supposons $a < b < 4a$. Bien sûr $a < b + c$.
Comme $b^2 - a^2 + ac > 0$, la réécriture de R_4 sous la forme

$$\left[(a+c)^2-b^2\right](b^2-a^2+ac)=b^2c^2$$

montre que $a + c > b$, donc $c > b - a$. De plus $a - b < 0 < c$, donc $|a - b| < c$.
D'autre part R_4 peut s'écrire

$$a(a+b-c)(a^2+2b^2+c^2+3ab+2ac+bc)=b(a+b)^2(4a-b)$$

et de $4a - b > 0$ on déduit $a + b > c$.
Finalement $|a - b| < c < a + b$, donc a, b, c sont les côtés d'un triangle non plat.

Comme $b^2 - a^2 + c^2 > 0$, R_4 implique $b^2 - ac - a^2 > 0$. On a

$$\cos\alpha > \cos\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} > \frac{1+\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow 2(b^2+c^2-a^2)-bc > bc\sqrt{5}. \qquad (12)$$

Le membre de gauche est strictement positif. En effet

$$2(b^2+c^2-a^2)-bc = 2(b^2-ac-a^2)+2ac+2c^2-bc.$$

D'une part $b^2 - ac - a^2 > 0$ et d'autre part l'inégalité triangulaire $a + c > b$ donne

$$2ac+2c^2-bc=c\,[2(a+c)-b] > c(2b-b)=bc.$$

On peut donc élever au carré la dernière inégalité de (12) et en posant $\Delta = b^2+c^2-a^2$, il vient

$$\cos\alpha > \cos\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow 4\Delta^2 - 4bc\Delta + b^2c^2 > 5b^2c^2 \Leftrightarrow \Delta^2 - bc\Delta - b^2c^2 > 0$$

Or d'après R_4, $b^2c^2 = \Delta(b^2-a^2-ac)$ si bien que

$$\cos\alpha > \cos\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow \Delta\left[\Delta - bc - (b^2-ac-a^2)\right] > 0 \Leftrightarrow \Delta c(a+c-b) > 0$$

et cette inégalité est bien vérifiée.

On a donc montré que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{5}$. On déduit alors de $0 < 4\alpha < \dfrac{4\pi}{5}$, $0 < \beta < \pi$ et $\cos\beta = \cos 4\alpha$ que $\beta = 4\alpha$.

(ii) Supposons $a > b$. Alors $b^2-a^2-ac < 0$, donc R_4 implique $b^2+c^2-a^2 < 0$, soit $b^2+c^2 < a^2$. Il en résulte

$$c < a.$$

La relation R_4 peut s'écrire

$$\left[(a-c)^2 - b^2\right](a^2-b^2+3ac+4c^2) = c^2(4c^2-4ac-5b^2).$$

Clairement $a^2-b^2+3ac+4c^2 > 0$. D'autre part $4c^2-4ac = 4c(c-a) < 0$ puisque $c < a$, donc $4c^2-4ac-5b^2 < 0$. Ainsi $(a-c)^2-b^2 < 0$, d'où $|a-c| < b$. De plus $b < a+c$ car $b < a$.

On a prouvé que $|a-c| < b < a+c$, donc a, b, c sont les côtés d'un triangle non plat.

Posons $\Delta = b^2+c^2-a^2$. Puisque

$$\cos\alpha > \cos\frac{3\pi}{5} \Leftrightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} > \frac{1-\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow 2\Delta - bc > -bc\sqrt{5}.$$

et que les deux membres sont clairement négatifs, cette inégalité équivaut à

$$(2\Delta - bc)^2 < (-bc\sqrt{5})^2.$$

Cette inégalité a déjà été rencontrée dans le cas $a < b$; sans refaire de calcul on a donc

$$\cos\alpha > \cos\frac{3\pi}{5} \Leftrightarrow \Delta c(a+c-b) < 0$$

et cela est bien vérifié car $\Delta < 0$. De plus $\cos\alpha = \dfrac{\Delta}{2bc} < 0$. Ainsi $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{5}$.

Comme $2\pi < 4\alpha < \dfrac{12\pi}{5}$ et $\cos\beta = \cos 4\alpha$, il vient $\beta = 4\alpha - 2\pi$.

2) Soit $a, b, c > 0$ vérifiant $(a-c)(a+c)^2 = ab^2$. L'égalité

$$1 - \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{a+c}\right)^2 < 1$$

montre que $b < a+c$. D'autre part

$$(a-c)^2 < b^2 \Leftrightarrow a(a-c)^2 < ab^2 \overset{\mathrm{R}'_4}{\Leftrightarrow} a(a-c)^2 < (a-c)(a+c)^2 \Leftrightarrow a(a-c) < (a+c)^2 \Leftrightarrow -3ac < c^2,$$

inégalité qui est bien vérifiée. Ainsi $|a-c| < b < a+c$, ce qui montre que a, b, c sont les côtés d'un triangle non plat.
La relation R'_4 est R_3 pour le triplet $(a, c, -b)$. Par conséquent en remplaçant (b, c) par $(c, -b)$ dans les calculs de la preuve du théorème 3,

$$\cos\alpha = \frac{b}{2(a+c)} \text{ et } \cos 3\alpha = \frac{a^2 + (-b)^2 - c^2}{2a(-b)} = -\cos\gamma$$

Puisque $\frac{b}{a+c} < 1$, on a $0 < \cos\alpha < \frac{1}{2}$, d'où il résulte $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
De $\pi < 3\alpha < \frac{3\pi}{2}$, $0 < \beta < \pi$ et $\cos 3\alpha = -\cos\gamma$, on déduit que $3\alpha - \gamma = \pi$. Finalement

$$4\alpha + \beta = 4\alpha + (\pi - \alpha - \gamma) = 3\alpha - \gamma + \pi = 2\pi.$$

3) Réciproquement, soit T un triangle vérifiant $\beta = 4\alpha$, $\beta = 4\alpha - 2\pi$ ou $4\alpha + \beta = 2\pi$. Alors $\cos(4\alpha) = \cos(\beta)$ donc d'après l'identité (11)

$$T \text{ est plat ou } (a-c)(a+c)^2 = ab^2 \text{ ou } (b^2 + c^2 - a^2)(b^2 - ac - a^2) = b^2c^2.$$

- Supposons que T vérifie $4\alpha + \beta = 2\pi$. Alors $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ car $4\alpha < 4\alpha + \beta = 2\pi \Rightarrow \alpha < \frac{\pi}{2}$ mais aussi

$$4\alpha + \beta = 2\pi \Rightarrow 4\alpha + \pi - \alpha - \gamma = 2\pi \Rightarrow 3\alpha = \pi + \gamma \Rightarrow 3\alpha > \pi.$$

  Ainsi le triangle est non plat et $(b^2 + c^2 - a^2)(b^2 - ac - a^2) \neq b^2c^2$ car sinon d'après 1) on aurait $0 < \alpha < \frac{\pi}{5}$ ou $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{5}$. Donc $(a-c)(a+c)^2 = ab^2$.

- Supposons que T est non plat et vérifie $\beta = 4\alpha$ ou $\beta = 4\alpha - 2\pi$. Dans le premier cas, d'après le théorème 1, on a $0 < \alpha < \frac{\pi}{5}$ et dans le second cas on a $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{5}$. Ainsi $(a-c)(a+c)^2 \neq ab^2$ (sinon $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ d'après 2) et donc $\beta = 4\alpha$ ou $\beta = 4\alpha - 2\pi$.
  Si $\beta = 4\alpha$, le théorème 1 montre que $a < b < 4a$. Enfin dans le cas où $\beta = 4\alpha - 2\pi$ on a $a > b$, car sinon d'après 1) on aurait $0 < \alpha < \frac{\pi}{5}$, contredisant $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{5}$. ■

Remarque 4. — On peut montrer que $\cos 2\alpha = \frac{b^2 - a^2 - ac}{2ac}$. Il en résulte notamment la formule $\cos\alpha\cos 2\alpha = \frac{b}{4a}$ qui remontre que $b < 4a$.

Triangles entiers vérifiant ces conditions. — On montre que si le couple d'entiers premiers entre eux (a, b, c) vérifie R_4 alors a est une puissance quatrième, et si le couple vérifie R_5, a est un cube. Une recherche exhaustive des tels triplets avec $a, b, c \leqslant N$ conduit aux observations suivantes.

- $\beta = 4\alpha$. Pour $N = 5000$, on trouve 6 solutions : $(81, 105, 31)$, $(256, 476, 305)$, $(625, 1395, 1111)$, $(1296, 3234, 2869)$, $(2401, 3864, 1969)$ et $(4096, 4264, 209)$.XXXXXXX

- $\beta = 4\alpha - 2\pi$. Pour $N = 5$, on trouve 6 solutions : $(16, 14, 5)$, $(81, 51, 55)$, $(256, 124, 209)$, $(625, 245, 551)$, $(625, 615, 31)$, et $(625, 460, 341)$. Pour $N = 70$, on en dénombre 13.

- $4\alpha + \beta = 2\pi$. Pour $N = 8$, on trouve 5 solutions : $(8, 7, 6)$, $(27, 17, 24)$, $(27, 28, 15)$, $(64, 31, 60)$ et $(64, 69, 28)$. Pour $N = 70$, on en dénombre 89.

5 Cas $n = 5$

Un logiciel de calcul formel donne l'égalité

$$\cos 5\alpha - \cos\beta = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab^5c^5} \times (a^4 - a^3b - a^2b^2 - 2c^2a^2 + ab^3 + abc^2 + c^4)$$
$$\times (-a^5 + a^4b + 2a^3b^2 + 2a^3c^2 - 2a^2b^3 - a^2bc^2 - ab^4 - ab^2c^2 - ac^4 + b^5).$$

Les termes ne comportant pas de c du dernier facteur peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} a^4b - a^5 + b^5 - ab^4 + 2a^3b^2 - 2a^2b^3 &= a^4(b-a) + b^4(b-a) - 2a^2b^2(b-a) \\ &= (a^2-b^2)^2(b-a) = (b-a)^3(b+a)^2. \end{aligned}$$

Théorème 7. — Soit la relation

$$(b-a)^3(b+a)^2 = ac^2(b^2 + c^2 + ab - 2a^2). \qquad (\mathbf{R_5})$$

Les réels strictement positifs a, b, c sont les côtés d'un triangle non plat vérifiant

(i) $\beta = 5\alpha$ si et seulement si R_6 et $a < b < 5a$.

(ii) $\beta = 5\alpha - 2\pi$ si et seulement si R_6, $a > b$ et $b^2 + c^2 - a^2 > 0$.

(iii) $\beta = 5\alpha - 4\pi$ si et seulement si R_6, $a > b$ et $b^2 + c^2 - a^2 < 0$.

Preuve. — En posant $\Delta = b^2 + c^2 - a^2$, la relation R_6 peut se réécrire

$$\Delta^2(b-a) = bc^2(2b^2 + c^2 - a^2 - ab)\ (\mathbf{R_{5a}}) \ \text{ et } \ \Delta(a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 - ac^2) = b^2c^2(b-a)\ (\mathbf{R_{5b}}).$$

Notons tout d'abord que si R_5 est vérifiée, alors $a \neq b$. En effet sinon on aurait $0 = ac^4$. On a aussi $\Delta \neq 0$ sinon R_{5b} donnerait $a = b$, ce qui est exclu comme on vient de le voir.

(i) Supposons $a < b < 5a$. Il est clair que $a < b + c$. La relation R_5 équivaut à

$$a\left[(a+b)^2 - c^2\right](2b^2 + c^2 + 3ab - a^2) = b^2(a+b)^2(5a - b). \qquad (13)$$

De $2b^2 + c^2 + 3ab - a^2 > 0$ (car $b > a$) et $5a - b > 0$, on déduit $c < a + b$. On a également, grâce à R_5,

$$\left[(b-a)^2 - c^2\right](a^3 + a^2b - ac^2 - ab^2 - b^3) = b^2c^2(b-a).$$

De $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 - ac^2 = (a-b)(a^2+b^2) - ac^2 < 0$, on déduit que $|b - a| < c$, donc a, b, c sont les côtés d'un triangle non plat.

Comme $\Delta > 0$, on a $\cos\alpha > 0$ et

$$\begin{aligned} \cos\alpha > \cos\frac{\pi}{6} \quad &\Leftrightarrow \quad \Delta > \sqrt{3}bc \\ &\Leftrightarrow \quad \Delta^2 - 3b^2c^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \Delta^2(b-a) - 3b^2c^2(b-a) > 0 \qquad (14) \\ &\overset{\mathrm{R}_{5a}}{\Leftrightarrow} \quad bc^2(2b^2 + c^2 - a^2 - ab) - 3b^2c^2(b-a) > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad bc^2(b + c - a)(a + c - b) > 0. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est bien vérifie, donc $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{6}$. De $\cos\beta = \cos 5\alpha$ on déduit que $\beta = 5\alpha$.

(ii) Supposons $a > b$ et $\Delta > 0$. Bien sûr $b < a + c$. On a aussi $(b+c)^2 > b^2 + c^2 > a^2$ car $\Delta > 0$, d'où $a < b + c$. L'égalite (13) permet de voir que $c < a + b$ car $5a - b > 0$ et

$$2b^2 + c^2 + 3ab - a^2 = \Delta + b^2 + 3ab > 0.$$

Ainsi a, b, c sont les trois côtés d'un triangle non plat.

Dans ce cas $\cos\alpha > 0$ et comme $2\Delta + bc > 0$, il vient

$$\begin{aligned}
\cos\alpha < \cos\frac{2\pi}{5} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\Delta}{2bc} < \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad 2\Delta + bc < bc\sqrt{5} \\
&\Leftrightarrow \quad 4\Delta^2 + 4\Delta bc + b^2c^2 < 5b^2c^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \Delta^2 + \Delta bc - b^2c^2 < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \Delta^2(b-a) + \Delta bc(b-a) - b^2c^2(b-a) < 0 \\
&\overset{\mathrm{R}_{5b}}{\Leftrightarrow} \quad \Delta^2(b-a) + \Delta bc(b-a) - \Delta(a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 - ac^2) < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \Delta bc(b + c - a) > 0.
\end{aligned}$$

Il en résulte $\dfrac{2\pi}{5} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ puis $\pi < 5\alpha < \dfrac{5\pi}{2}$ d'où $\beta = 5\alpha - 2\pi$.

(iii) Supposons $a > b$ et $\Delta < 0$. Là encore $b < a + c$. De $b^2 + c^2 < a^2$, on déduit que $c < a$, donc $c < a + b$. En réécrivant R_5

$$(b + c - a)(\Delta - bc)(b^2 - a^2 - ac) = b^2c^3$$

et en constatant que $\Delta - bc$ et $b^2 - a^2 - ac$ sont strictement négatif, on obtient $a < b + c$. Par conséquent a, b, c sont les côtés d'un triangle non plat.

D'une part

$$\cos\alpha > \cos\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \Delta > -\sqrt{3}bc \Leftrightarrow \Delta^2 - 3b^2c^2 < 0 \Leftrightarrow \Delta^2(b-a) - 3b^2c^2(b-a) > 0,$$

et cette dernière est vraie puisqu'il s'agit de (14).

D'autre part un calcul montre que R_6 équivaut à

$$(b-a)(2\Delta - bc)(2\Delta + bc) = bc^2\left[4\Delta + 3b(b-a)\right].$$

L'analyse des signes des facteurs montre que $2\Delta + bc < 0$ si bien que

$$\begin{aligned}
\cos\alpha < \cos\frac{4\pi}{5} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\Delta}{2bc} < \frac{-\sqrt{5}-1}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad 2\Delta + bc < -bc\sqrt{5} \\
&\Leftrightarrow \quad 4\Delta^2 + 4\Delta bc + b^2c^2 > 5b^2c^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \Delta^2 + \Delta bc - b^2c^2 > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \Delta^2(b-a) + \Delta bc(b-a) - b^2c^2(b-a) < 0.
\end{aligned}$$

Cette inégalité est vraie, c'est celle du (ii). Ainsi $\dfrac{4\pi}{5} < \alpha < \dfrac{5\pi}{6}$, puis $4\pi < 5\alpha < \dfrac{25\pi}{6} < 5\pi$, donc $\beta = 5\alpha - 4\pi$. ∎

Triangles entiers vérifiant ces conditions. — On montre que si le couple d'entiers premiers entre eux (a, b, c) vérifie R_5 alors a est une puissance cinquième. Une recherche exhaustive des tels triplets avec $a \leqslant N$ conduit aux observations suivantes.

- $\beta = 5\alpha$. Pour $N = 10$, on trouve 8 solutions : $(4^5, 1220, 231)$, $(5^5, 5555, 3024)$, $(6^5, 17214, 12155)$, $(7^5, 42833, 34320)$, $(8^5, 92168, 79695)$, $(9^5, 89001, 36400)$, $(9^5, 178695, 162656)$, $(10^5, 320210, 302499)$.
- $\beta = 5\alpha - 2\pi$. Pour $N = 5$ on trouve 7 triplets :

  $(2^5, 10, 33)$, $(3^5, 93, 160)$, $(3^5, 165, 208)$, $(4^5, 836, 705)$, $(5^5, 155, 3168)$, $(5^5, 1705, 2982)$ et $(5^5, 2755, 1776)$
  Pour $N = 12$ on en trouve 28.
- $\beta = 5\alpha - 4\pi$. Pour $N = 12$, on trouve 6 triplets : $(3^5, 93, 160)$, $(7^5, 13783, 3420)$, $(8^5, 1672, 31395)$, $(10^5, 68210, 35343)$, $(11^5, 22055, 142506)$ et $(11^5, 153109, 9120)$.